

Concours d'entrée en 1^{ère} année du cycle préparatoire

Epreuve de mathématiques (durée 1h30min)

Remarques importantes

- 1) Les documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
- 2) Parmi les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.
- 3) Cocher la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.

4) **Règles de notation :**

Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; Sans réponse = **0 point**.

Noter Bien Plus qu'une case cochée = **-1 point**.

Exercice 1

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - (-1)^n n + 1}{n + 3}$ n'existe pas.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n + 1) - \ln(n + 2)$ n'existe pas.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n)$ n'existe pas.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0, 7)^n + (0, 7)^n$ n'existe pas.

Exercice 2

On considère une suite de réels (u_n) .

1. Une suite (u_n) croissante est-elle nécessairement divergente vers $+\infty$?
2. Une suite (u_n) divergente vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante?
3. Une suite (u_n) bornée est-elle nécessairement convergente?
4. Une suite (u_n) croissante et non majorée diverge-t-elle nécessairement vers $+\infty$?

Exercice 3

Soient z_1 et z_2 les deux nombres complexes solutions de l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 puis I le milieu du segment $[M_1, M_2]$.

1. Le nombre $z_1 + z_2$ est imaginaire pur.
2. L'affixe du point I est imaginaire pure.
3. Les droites (OI) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.
4. Le triangle OM_1M_2 n'est pas équilatéral.

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par $P(X) = 2X^3 + X^2 - 5X + 2$.

1. Les réels $-2, \frac{1}{2}, -1$ sont solutions de l'équation $P(x) = 0$.
2. L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $2e^{3x} + e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ est $S = \{\ln 2, 0\}$.
3. L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5 \ln x + 2 = 0$ est $S = \left\{e, \frac{1}{e^2}, \sqrt{e}\right\}$.
4. L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $2 \sin^3 x + \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ est $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Exercice 5

D'un sac contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on extrait trois boules simultanément.

1. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de 5 est $\frac{2}{15}$.
2. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au plus une dont le numéro est un multiple de 5 est $\frac{13}{15}$.
3. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au moins une dont le numéro est un multiple de 5 est $\frac{8}{15}$.
4. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de 3 est $\frac{1}{60}$.

Exercice 6

Soient les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n - 1$ et $v_n = 3^{u_n}$.

1. La suite (v_n) est géométrique.
2. La suite (v_n) est divergente.
3. Pour tout entier $n > 0$, si $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$.
4. La suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \ln(v_n)$ est géométrique.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. La suite (u_n) est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La suite (u_n) est croissante.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 16\sqrt{2}$.
4. La suite (u_n) est convergente.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos x e^{\sqrt{1-\cos^2 x}}$.

1. $f(\pi - x) - f(x) = 0$.
2. Le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. La dérivée de f est $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$.
4. Une primitive F de f est définie par $F(x) = e^{\sin x}$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2-x-2}\right)$.

1. La fonction f est définie sur $] -1, 1[\cup] 2, +\infty[$.
2. La fonction f peut s'écrire $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x^2-x-2)$ sur $] -1, 1[\cup] 2, +\infty[$.
3. $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2}$ sur $] -1, 1[\cup] 2, +\infty[$.
4. La fonction f est croissante sur $] 2, +\infty[$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ et $f(0) = 0$.

1. La fonction f n'est pas continue en 0.
2. Sur \mathbb{R} , $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
4. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} représentative de f .

Exercice 11

1. La fonction $x \rightarrow \cos(4(x+1))$ est la dérivée de la fonction $x \rightarrow \cos(x+1)\sin(x+1)$.
2. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sin^2 x}$ est la dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x + 1}\right)$.
3. La fonction $x \rightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ est la dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(\sqrt{x^2-1}-x)$.
4. La fonction $x \rightarrow (\sin 2x)e^{\sin^2 x}$ est la dérivée de la fonction $x \rightarrow e^{\sin^2 x}$.

Exercice 12

On considère les deux intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$.

1. $2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$.
2. $I + J = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.
3. $I = \frac{4 + \sqrt{2}}{12}$.
4. $J = \frac{5\sqrt{2} - 8}{12}$.

Exercice 13

Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. La fonction f est paire.
2. On a $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
3. La fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .
4. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) < 2$.

Exercice 14

1. $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x| + |x+1|) dx = 0$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos |x| dx = 0$.
3. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
4. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow x^2\sqrt{x^2+1}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 15

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère orthonormal de l'espace. Soit \mathcal{P} le plan de repère (A, \vec{u}, \vec{v}) où $A(-1, 1, 2)$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

1. Le vecteur $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ n'est pas normal au plan \mathcal{P} .
2. L'équation cartésienne du plan \mathcal{P} est $x + y - 2z + 6 = 0$.
3. La droite \mathcal{D} passant par le point $B(1, 0, -1)$ et de vecteur directeur \vec{w} est définie par $y + x - 1 = 0$ et $z + 2x - 1 = 0$.
4. Le plan \mathcal{P} et la droite \mathcal{D} se coupent au point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.