RESUME CHAPITRE 8. OSCILLATEURS HARMONIQUES

Un **mouvement rectiligne harmonique** est un mouvement rectiligne dont la loi horaire est une fonction sinusoïdale du temps. Sa forme la plus générale s'écrit : $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$, x(t) est appelée **élongation.** d'**amplitude maximale** x_0, de **pulsation** ω et de **phase** φ. Le mouvement est donc **périodique**, de **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$, La **fréquence** vaut $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

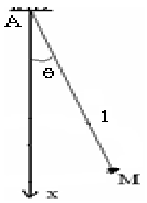
Oscillateurs non amortis

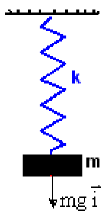
Equation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Solution générale :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$





$$m\ddot{x}\,\vec{i} = -k(x - x_0)\vec{i} + mg\vec{i}$$

L'équation du mouvement devient : $m\ddot{X} + kX = 0$.
Il s'agit d'un oscillateur harmonique

Oscillateurs amortis

Equation différentielle : (frottement visqueux)

D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_v = m\ddot{x}\,\vec{i} \;\Rightarrow\; mg - kx - f\dot{x} = m\ddot{x}$$

d'où $\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = g$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

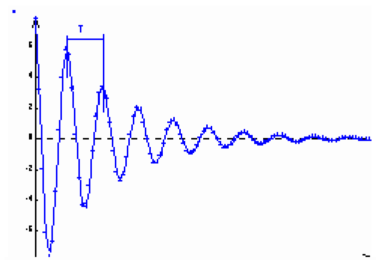
L'équation caractéristique : $r^2 + \frac{f}{m} r + \omega_0^2 = 0$;

Le discriminent réduit est : $\Delta' = \left[\frac{f}{2m}\right]^2 - \omega_0^2$.

Régime pseudo-périodique : Δ'<0 racines complex .

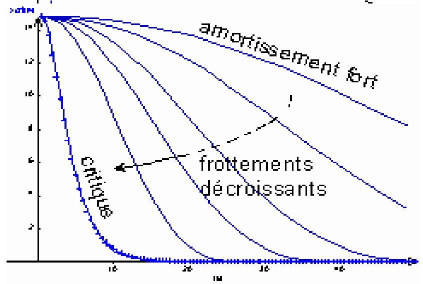
$\alpha = \frac{f}{2m}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}$

$$X(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$$



Régime critique : Δ'=0 Une racine double

$$X(t) = X_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}$$



Régime fortement amorti : Δ'>0 racines réelles

$$X(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

r1 et r2 les racines

$r_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha - \omega_0}$ et $r_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha - \omega_0}$

Oscillateurs forcés amortis

Considérons un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox vertical descendant. Ce point est soumis à l'action de son poids, $\vec{P}$, de la force $\vec{F}$ d'un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0, d'une force de frottement visqueux $\vec{F}_v$ et d'une excitation sinusoïdale $\vec{F}_i$.

D'après le PFD, on a : $\vec{F}+\vec{P}+\vec{F}_v+\vec{F}_i=m\vec{\gamma}(M/R)$. Par projection sur l'axe Ox, on obtient : $mg-kx-f\dot{x}+F_i\sin\omega_i t=m\ddot{x}$, soit avec :

$X=x-x_e$: $\ddot{X}+\frac{f}{m}\dot{X}+\frac{k}{m}X=\gamma_i\sin\omega_i t$.

La solution générale de l'équation avec second membre s'écrit : $X(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)+C\sin(\omega_i t-\phi)$ avec $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ et $\alpha=\frac{f}{2m}$.

Le terme $Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$ est le régime transitoire (solution du cas des oscillations libres et amorties), sa valeur étant exponentiellement décroissante et devient négligeable devant le régime permanent $C\sin(\omega_i t-\phi)$ qui est en fait la solution particulière de l'équation différentielle du mouvement avec second membre.

La solution particulière dans l'équation du mouvement montre qu'à tout instant elle doit vérifier la condition suivante :

$$C[(\omega_0^2-\omega_i^2)\sin(\omega_i t-\phi)+\frac{\omega_0\omega_i}{Q}\cos(\omega_i t-\phi)]=\gamma_i\sin\omega_i t.$$

Les deux constantes peuvent être déterminées, par exemple, en prenant $\omega_i t=0$ et $\omega_i t=\frac{\pi}{2}$, soit

$\frac{\omega_0\omega_i}{Q}\cos\phi-(\omega_0^2-\omega_i^2)\sin\phi=0$ et $C[(\omega_0^2-\omega_i^2)\cos\phi-\frac{\omega_0\omega_i}{Q}\sin\phi]=\gamma_i$.

On peut montrer que la phase ϕ est comprise entre 0 et π, avec le signe négatif qui apparaît dans l'expression de la réponse permanente donne l'appellation pour ϕ de ***retard de phase***. Après transformation et calcul, on obtient que $tg\phi=\frac{\omega_0\omega_i}{Q(\omega_0^2-\omega_i^2)}$.

Phénomène de résonances

L'amplitude en fonction de la fréquence excitatrice ω_i est souvent représenté par $C(\lambda)$ où $\lambda=\frac{\omega_i}{\omega_0}$; on a :

$C(\lambda)=[(1-\lambda^2)^2+(\frac{\lambda}{Q})^2]^{-\frac{1}{2}}$ dont les courbes en fonction des valeurs de Q sont données dans la figure ci bas.

Dans le cas d'un amortissement important, le maximum de $C(\lambda)$ est égal à 1 et s'observe en $\lambda=0$. Dans le cas des oscillations faiblement amorties, ce maximum peut atteindre des valeurs très importantes pour λ comprise entre 0 et 1 (λ est beaucoup plus proche de 1 que l'amortissement est plus faible).