MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Chapitre I : Rappel sur le calcul vectoriel

Pr. Fatima BOUYAHIA
1ère Année
Cycle Préparatoire

I.1 Introduction

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons rapporter quelques notions de bases liées au calcul vectoriel. La maitrise de ces techniques est nécessaire pour l'assimilation de la mécanique.

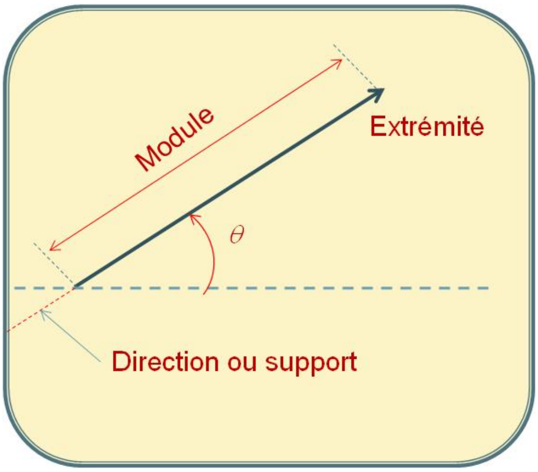
I.2 Scalaire et vecteur

I .2.1 Qu'est ce qu'un scalaire ?

Un scalaire est une grandeur totalement définie par un nombre est une unité. (temps, température, masse, énergie, volume, … etc)

I.2.2 Qu'est ce qu'un vecteur ?

Un vecteur est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et une intensité :

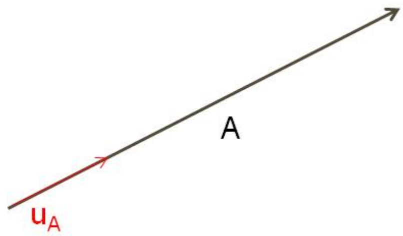


- **L'origine** : le point d'application
- **La direction :** la droite qui porte le vecteur**.** Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.
- **Le sens** représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- **L'intensité, norme ou module,** représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

Notion de vecteur unitaire :

A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à 1. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module :

$$\|\vec{u}\| = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$



Notion de vecteur lié et vecteur glissant :

a/ les **vecteurs liés** sont notés $\vec{v}(A)$ **l'origine A est fixé** ;
b/ Si le **point d'application se déplace** sur la droite, le vecteur est dit **vecteur glissant**.

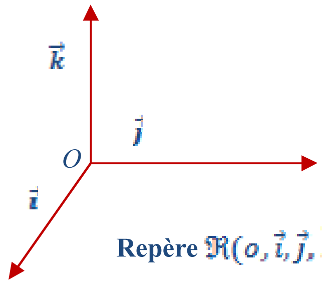
2.1.3 Repère de l'espace affine:

$\mathcal{E}$ désigne l'espace affine réel de dimension 3. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des points que l'on note : A, B, M, N, …etc. D'autre part E désigne l'espace vectoriel attaché à $\mathcal{E}$, ses éléments sont des vecteurs que l'on note : $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ …etc.

Nous considérons comme acquises les notions de repère affine de $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel E. Un tel repère sera noté $\Re(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où O est un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ pris comme origine et $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de l'espace des vecteurs libres. (un vecteur libre est un vecteur qui définie une direction dans l'espace
$\forall \vec{u} \in E \quad \exists\, (x, y, z) \in IR3$ tel que $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$.

Représentation du repère $R(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine

Ce repère est une base orthogonale : les vecteurs libres de la base portés dans l'espace à partir de l'origine O du repère forment un trièdre trirectangulaire direct.



Repère $\Re(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

I.3 Opérations sur les vecteurs

Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ trois vecteur de l'espace vectoriel E. avec :

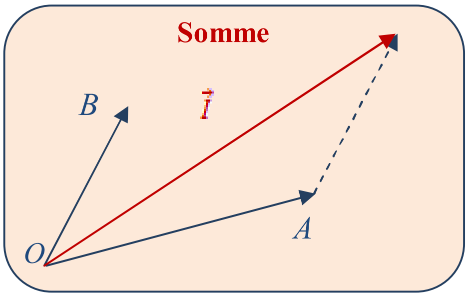
$$\overrightarrow{OA} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} + z_A\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j} + z_B\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OC} = x_C\,\vec{i} + y_C\,\vec{j} + z_C\,\vec{k}$$

I.3.1 Somme et multiplication par un scalaire

- La somme de deux vecteurs :

$$\vec{I} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_A + x_B)\vec{i} + (y_A + y_B)\vec{j} + (z_A + z_B)\,\vec{k}$$

Le vecteur $\vec{I}$ est représenté géométriquement par :
(voir figure Somme)



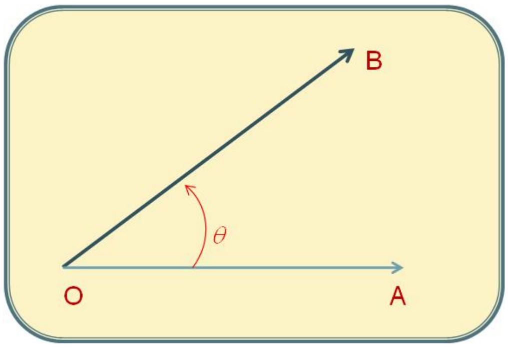
- La multiplication par un scalaire :

$$\forall\, \mu \in IR, \quad \mu\,\overrightarrow{OA} = \mu x_A\,\vec{i} + \mu y_A\,\vec{j} + \mu z_A\,\vec{k}$$

I.3.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB **est le nombre réel** $OA.OB.cos(\theta)$ si l'angle θ désigne celui de AOB. Si l'un des vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.
Dans le cas où aucun des vecteurs n'est nul, cette définition prend la forme suivante :

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = OA * OB * \cos\theta$$



Propriétés du produit scalaire :

Commutativité :
Le produit scalaire est commutatif :
$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA}$ (Justification : $\cos\theta = \cos(-\theta)$)

Distributivité par rapport à l'addition :
Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :
$\overrightarrow{OA}\,.\,(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}$

Conséquence :

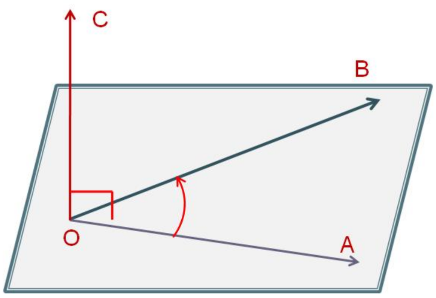
Si $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perendicularité géometrique lorsqu'il est de valeur nulle.

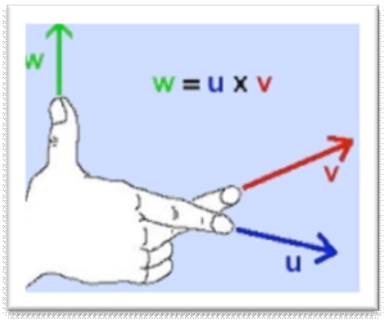
Expression analytique :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$

I.3.3 Produit vectoriel



Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB est le vecteur représenté par le bipoint OC avec :



- **Un module** égale à OA.OB.sin(θ)
- **Une direction** perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs OA et OB
- **Un sens** défini par la règle de la main droite ou de la progression du tire bouchon qui envoi $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$. On note :

$\left\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right\| = OA * OB * \sin\theta$

Propriétés du produit vectoriel :

Commutativité :

Le produit vectoriel est **anti**commutatif :

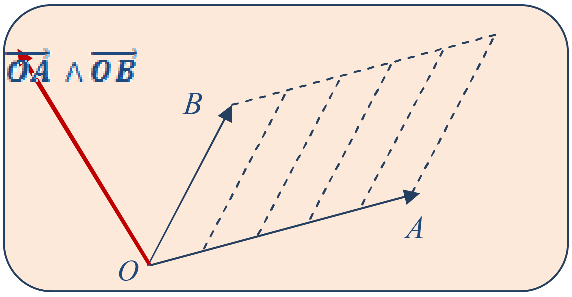
$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA}$ (Justification : $\sin\theta = -\sin(-\theta)$)

Distributivité par rapport à l'addition :

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$

Interprétation géométrique du produit vectoriel :



Le module de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est donné par $OA * OB * \sin\theta$ qui représente l'aire (surface) du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.

Conséquence :

Si $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$

Expression analytique :

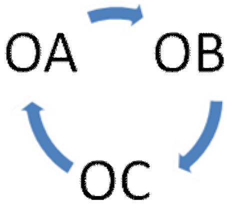
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y_A z_B - z_A y_B) & \vec{i} \\ -(x_A z_B - z_A x_B) & \vec{j} \\ (x_A y_B - y_A x_B) & \vec{k} \end{vmatrix}$$

(Voir exemple flèches)

I.3.4 Produit mixte

Le produit mixte de Trois vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB et OC est un scalaire ; Il est le déterminant de ces trois vecteurs dans une base orthonormale directe quelconque.

On note : $[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}] = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})$



<u>**Propriétés du produit mixte :**</u>

- $[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}] = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}.(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA})$
-

Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Conséquence :

Expression analytique :

$$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix}$$

I.3.5 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel peut être calculé à l'aide de la relation suivante :

$\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}).\overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}$

I.3.6 Dérivation vectorielle

Soient M(x(t), y(t), z(t)) du repère R(O,xyz) on a :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Par définition :

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Que l'on note aussi :

$$\frac{d\vec{M}}{dt}.$$

Propriétés :

- $\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\qquad \frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}.\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{u}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}$ $\qquad \frac{d}{dt}[\lambda(t)\vec{u}(t)] = \frac{d\lambda}{dt}\vec{u} + \lambda\frac{d\vec{u}}{dt}$