Mécanique du point matériel

TD1

Questions de cours :

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/\mathfrak{R}) = V\vec{\tau}$.

1) Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?
2) Quelle relation existe-t-il entre $s(t)$ et V ?
3) Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathfrak{R}$ est donné par :

$$\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

4) Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$.

Exercice 1:

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathfrak{R}(O,xyz)$ par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) données par :

$$x = R(1 - coswt) \quad , \quad y = R(1 - sinwt) \quad , \quad z = 0$$

Où R et w sont des constantes positives et t le temps.

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}$.
2) En déduire la nature de cette trajectoire.
3) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ du point M dans $\mathfrak{R}$.

Exercice 2:

Soit $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. Considérons un point matériel M qui décrit dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un mouvement suivant la trajectoire de la figure 1. L'équation de cette trajectoire est donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + cos\varphi)$$

où ρ_0 est une longueur donnée, $0 \leq \varphi \leq \pi$ et $\dot{\varphi} > 0$.

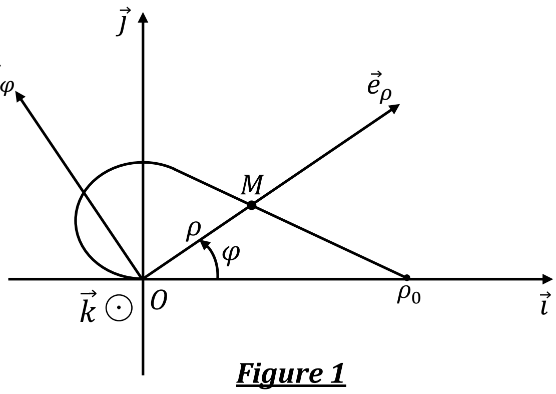

Figure 1

1) Démontrer que la vitesse de M dans $\Re$ peut s'écrire dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme :

$$\vec{V}(M/\Re) = \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

2) a) Déterminer $\|\vec{V}(M/\Re)\|$ le module du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\Re)$.

   b) En déduire $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

3) a) Montrer que l'angle $(\widehat{\vec{e}_\varphi, \vec{\tau}}) = \varphi/2$.

   b) Représenter graphiquement le vecteur $\vec{\tau}$.

4) Déterminer $\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_n$ respectivement les vecteurs accélérations tangentielle et normale.

5) En déduire ρ_c le rayon de courbure de la trajectoire ainsi que le vecteur unitaire $\vec{n}$.

6) a) Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne s de M comptée à partir du point correspondant à $\varphi = 0$. On donne $s(\varphi = 0) = 0$.

   b) En déduire la longueur totale de la trajectoire considérée.

Exercie 3 : Système à vecteur accélération constant

A l'instant t=0, une particule ponctuelle M est lancée du point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ située dans le plan (Oxz) et faisant avec l'horizontale un angle $\alpha > 0$ susceptible d'être ajusté (figure 1).

Le mouvement de ce point, étudié dans le référentiel terrestre $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est à vecteur accélération constant :

$$\vec{a}(M/R) = \vec{a} = -g\overrightarrow{e_z} \text{ avec } g = \|\vec{g}\| > 0.$$

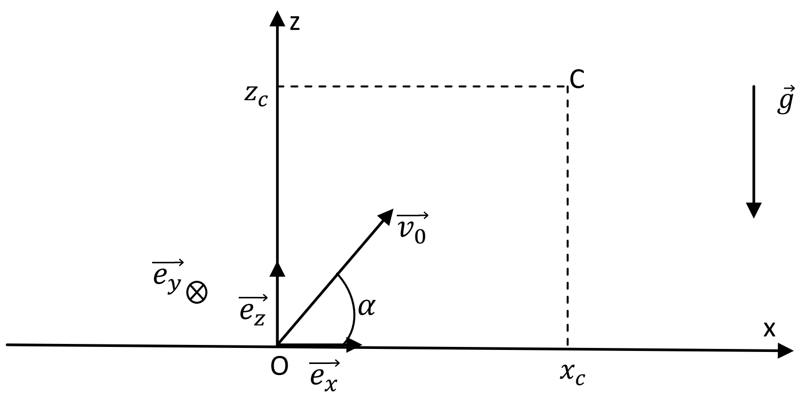

Figure 1

1- Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/R)$ à l'instant t et les équations horaires du mouvement.
2- En déduire l'équation de la trajectoire de M et préciser la nature de celle-ci.
3- A quel instant t_s, le sommet S de cette trajectoire est-il atteint ? Quelles sont ses coordonnées x_s et z_s ?
4- Quelle est la portée OP du projectile, c'est-à-dire le point P où la trajectoire coupe l'axe (Ox). A quel instant t_p ce point est-il atteint ? quelles est la norme du vecteur vitesse en P ?
5- Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles ces trajectoires issues de l'origine O atteignent une même cible C dans le plan (Oxy).
6- Rechercher l'ensemble des points du plan (Oxy) accessibles au projectile lancé de O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de norme constantes mais de direction quelconque. Vous déterminer pour cela l'équation de la parabole de sûreté séparant les points du plan pouvant etre atteints par le projectile de ceux qui ne le seront jamais.

Exercie 4 : spirale d'Archimède

Un disque D de centre O tourne dans le plan (Oxy) à vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe (Oz). Un mobile ponctuel M part de O à l'instant t=0 et est astrint à se déplacer à vitesse constante le long d'un rayon du disque (figure 2) :

$$\vec{v}(M/D) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_r} \text{ avec } (v_0 > 0).$$

L'étude du mouvement guidé de M peut s'effectuer dans deux référentiels : le référentiel terrestre $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ ou le référentiel du disque $R(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

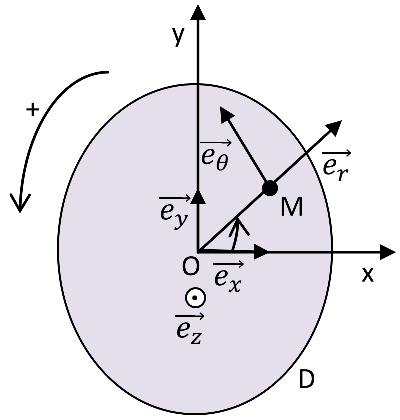

Figure 2

1- Exprimer les coordonnées cartésiennes $x\ et\ y$ en fonction des coordonnées polaire $r\ et\ \theta$.
2- Considérons le mouvement de M par rapport au référentiel R. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération du point M en fonction de $r\ et\ \theta$ et de leurs dérivées temporelles successives :
   a) dans la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$;
   b) dans la base cylindro-polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.
   Ces expressions sont-elles équivalentes ? Quelle est la base la mieux adaptée pour résoudre ce problème ?
3- Donner, en coordonnées polaires, les équations horaires de M : $r(t) et\ \theta(t)$. Vous les exprimeriez en fonction de $v_0, \omega_0\ et\ t$, en tenant compte du caractère guidé de M sur un rayon du disque à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$.
4- En déduire l'équation et tracer l'allure de sa trajectoire dans le référentiel terrestre $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Montrer que r est incrémenté d'une longueur constante d à chaque tour du disque.
5- Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OM}, \vec{v}(M/R)\ et\ \vec{a}(M/R)$ en coordonnées polaires dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, en fonction de $v_0, \omega_0\ et\ t$.
6- Quelle est la trajectoire et l'accélération $\vec{a}(M/R)$ dans le référentiel du disque ?

Exercie 5 : Formule de Binet

Dans le plan xOy un point M en mouvement est repéré par ses coordonnées polaires $r(t) et\ \theta(t)$.

1- Retrouver les expressions de sa vitesse $\vec{v}$ et de son accélération $\vec{a}$ et donner leurs composantes.

2- On suppose que $\vec{a}$ passe toujours par O (mouvement à accélération centrale). Montrer que la quantité $\vec{c} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est constante. En déduire que le mouvement obéit à la loi des aires, c'est-à-dire que l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle au temps. Démontrer les formules de Binet :

$$v^2 = c^2 \left[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2 \right] \text{ et } a = -c^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right]$$

où c est la constante des aires et $u = 1 / r$.

Exercice 6: Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu en un point O fixe par un fil de longueur L inextensible et de masse négligeable (voir figure1). Il décrit un cercle horizontal à la vitesse angulaire ω constante.

1- Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération de M en fonction $L, \alpha\ et\ \omega$.

2- Déterminer l'expression de la tension du fil.

3- Donner l'expression de l'inclinaison α du fil par rapport à la verticale.

4- En déduire la condition sur ω pour garder un mouvement horizontal.

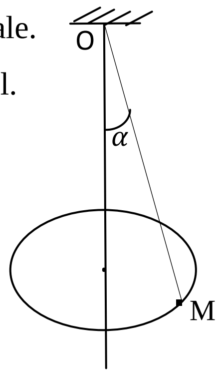

Fig 1 : pendule conique

Exercice 7: Particule soumise à la résistance de l'air

Le mouvement étant étudié dans un référentiel galiléen $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ avec Oz est un axe vertical ascendant, on considère un objet ponctuel M de masse m lancé en O au temps t=0 avec une vitesse initiale : $\vec{v} = v_0 cos\alpha \overrightarrow{e_x} + v_0 sin\alpha \overrightarrow{e_z}$ avec $\alpha > 0$.

Le champ de gravitation terrestre sera considéré comme uniforme, et on posera $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. On admettra que la résistance de l'air, dans le domaine considéré, est de la forme $\vec{R} = -k\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'objet et k une constante positive.

1- Déterminer en fonction du temps les composantes de $\vec{v}$.

2- Déterminer en fonction du temps les coordonnées de l'objet.

3- Etudier les limites de $v_x, x, z\ et\ v_z$ pour $t \to \infty$.

4- En déduire l'allure de la trajectoire. On précisera les coordonnées de son sommet, on montrera qu'elle admet une asymptote, et on présentera la courbe correspondante.

5- Déterminer l'équation de l'hodographe $(v_z = f(v_x))$; tracer la courbe correspondante en ayant soin de préciser les points correspondant respectivement au départ de l'objet, au sommet de la trajectoire, et à la partie asymptotique de celle-ci.

6- Déduire de l'hodographe la vitesse minimale de l'objet et préciser si celle-ci est atteinte en un point situé sur la partie ascendante ou descendante de la trajectoire.

7- Application numérique :

$$m = 1kg, v_0 = 150ms^{-1}, \alpha = 30^{\circ}, g = 9{,}81ms^{-2}\ et\ h = 1Nm^{-1}s$$

Calculer la position de l'asymptote, les coordonnées du sommet, la vitesse de l'objet au sommet, la vitesse correspondant à $t \to \infty$, la vitesse minimale.