UNIVERSITE CADI AYYAD
ENSA- MARRAKECH

Contrôle 1 : Mécanique du point matériel

CP 1ère année 2015-2016

Durée : 2h

- La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Donner les expressions littérales avant d'effectuer les applications numériques.

Exercice 1 : (2 pts)

Dans un référentiel $\Re$, un point M décrit un cercle de centre O et de rayon r avec une vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ de module $\|\vec{V}(M/\Re)\| = \frac{V_0}{1+\alpha t}$ où V_0 et α sont deux constantes positives.

1) Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que $s(t=0)=0$.

2) En déduire la durée du 1^{er} tour effectué par le point M.

3) Exprimer $\vec{\gamma}(M/\Re)$ l'accélération du point M dans la base de Frénet.

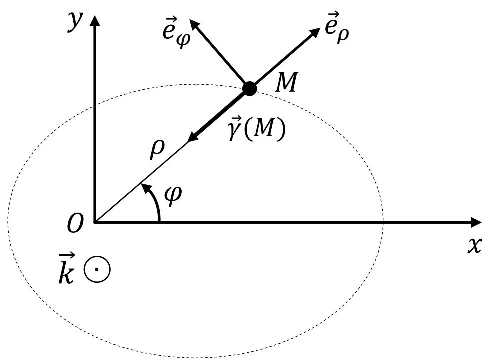
Exercice 2 : (4 pts)

Considérons un point matériel M de masse m qui décrit dans un référentiel fixe $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, supposé galiléen, une trajectoire située dans le plan (xoy) de façon à ce que son accélération passe toujours pas un point fixe O (mouvement à accélération centrale).

Un mouvement est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout instant t, le vecteur accélération du point M, $\vec{\gamma}(M/\Re)$, est colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Il en découle :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{0}$$



Soit $\vec{c}$ le vecteur défini par : $\vec{c} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/\Re)$

1) Montrer que $\vec{c}$ est un vecteur constant.

2) Déduire que le moment cinétique de M par rapport à O est constant.

3) Donner l'expression de $\vec{c}$ en coordonnées polaires (ρ,φ).

4) Donner $c = \|\vec{c}\|$ en fonction de ρ et $\dot{\varphi}$. Déduire de $c = cte$ que $2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0$.

5) On pose $u = \frac{1}{\rho}$, démontrer que $\vec{V}(M/\Re) = -c\frac{du}{d\varphi}\vec{e}_\rho + cu\vec{e}_\varphi$.

Exercice 3 : (4 pts)

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\Re(O, xyz)$ par ses coordonnée cylindriques (ρ, φ, z) telles que : $\rho = R$, $\varphi = \omega t$ et $z = h\varphi$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1) Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2) a) Quelle est la nature du mouvement de M dans le plan (xOy) ?

b) Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz) ?

c) Quelle est la nature du mouvement résultant de M ?

3) Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

4) Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que $s(t = 0) = 0$.

5) Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération de M selon les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ du trièdre de Frénet.

6) Calculer R_C le rayon de courbure de la trajectoire de M.

7) Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$.

Exercice 4 (10 pts)

Soients $\Re(O, xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1, x_1y_1z_1)$ le référentiel relatif muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Un point M est assujetti à se déplacer sur une Tige (T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une Tige (T) en rotation d'angle $\varphi(t)$ autour de l'axe (Oz) (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho, \vec{k})$. Le point O_1 est repéré par :

$\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par : $\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}$ ($V_0 = cte$). Le vecteur unitaire $\vec{u}$ fait un angle constant α avec le vecteur $\vec{e}_\rho$.

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\,, \vec{e}_\varphi\,, \vec{k})$.

I-Etude de la cinématique de M par calcul direct :

1) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{k}$ et α.

2) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3) Déterminer $\vec{V}(M/\Re)$ la vitesse de M dans le repère $\Re$.

4) Déterminer $\vec{\gamma}(M/\Re)$ l'accélération de M dans le repère $\Re$.

II-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :

1) Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par : $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{k}$.

2) Déterminer $\vec{V}_r(M)$ la vitesse relative de M.

3) Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de M.

4) En déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de M.

5) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de M.

6) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.

7) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.

8) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.