Chapitre V
Transformée en z

Filière:
Génie Réseaux et Télécommunications

La transformée en z joue le même rôle que la transformée de Laplace dans l'analyse des systèmes linéaires invariants dans le temps et les signaux à temps discret (à temps continu pour Laplace).

Transformée en z

La transformée en z d'un signal à temps discret $x(n)$ est définie comme suit:

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (1)$$

Où z est une variable complexe. L'opération inverse (pour avoir $x(n)$ à partir de $X(z)$) s'appelle la transformée en z inverse que nous étudierons par la suite. Nous pouvons aussi noter la transformée en z de $x(n)$ par l'écriture:

$$X(z) = Z\{x(n)\} \quad (2)$$

Puisque $X(z)$ est une série infinie, il est clair que cette dernière existe pour des valeurs pour les quelles elle converge. la région dans laquelle $X(z)$ converge s'appelle la région de convergence.

Région de convergence

Déterminer la transformée en z et le rayon de convergence des signaux à durées finies suivants:

1. $x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$

   Réponse: $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$, le plan Z-$\{0\}$

2. $x_2(n) = \{1, 2, \underbrace{5}_{\uparrow n=0}, 7, 0, 1\}$

   Réponse: $X_2(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$, le plan Z-$\{0,\infty\}$

3. $x_3(n) = \delta(n)$

   Réponse: $X_3(z) = 1$, le plan Z entier

Région de convergence

Même chose pour:

1. $x_4(n) = \delta(n-k),\ k \succ 0$

   Réponse: $X_4(z) = z^{-k}$, le plan Z-$\{0\}$

2. $x_5(n) = \delta(n+k),\ k \succ 0$

   Réponse: $X_5(z) = z^{k}$, le plan Z-$\{\ \infty\ \}$

3. $x_6(n) = (\frac{1}{2})^n U(n)$

   Réponse: $X_6(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, dans la région de convergence $|z| \succ \frac{1}{2}$

Région de convergence

Soit l'expression polaire de la variable z comme suit: $z = r\exp(i\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ alors l'expression de $X(z)$ est de la forme:

$$X(z)_{z=r\exp(i\theta)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} \exp(-in\theta) \tag{3}$$

Or

$$|\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} \exp(-in\theta)| \preceq \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n} \exp(-in\theta)| \tag{4}$$

et $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n} \exp(-i\theta)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n}|$, donc:

$|X(z)|$ est défini si $x(n)r^{-n}$ est absolument sommable

$\Longleftrightarrow$

Trouver la région de convergence de $X(z)$ revient à trouver les valeurs de r pour lesquelles $x(n)r^{-n}$ est absolument sommable.

Région de convergence

Soit l'expression polaire de la variable z comme suit: $z = r\exp(i\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ alors l'expression de $X(z)$ est de la forme:

$$X(z)_{z=r\exp(i\theta)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} \exp(-in\theta) \tag{3}$$

Or

$$\left|\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) r^{-n} \exp(-in\theta)\right| \preceq \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n} \exp(-in\theta)| \tag{4}$$

et $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n} \exp(-i\theta)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n}|$, donc:
$|X(z)|$ est défini si $x(n)r^{-n}$ est absolument sommable
$\Longleftrightarrow$
Trouver la région de convergence de $X(z)$ revient à trouver les valeurs de r pour lesquelles $x(n)r^{-n}$ est absolument sommable.

Propriétés de la transformée en z

1. La transformée en z est primordiale pour l'étude des signaux à temps discret et des systèmes aussi, ceci est grâce aux propriétés importantes qu'elle possède.
2. Dans la suite nous examinerons quelques unes. Reste à rappeler que la région de convergence d'une combinaison de transformées en z est l'intersection de toutes les régions de convergence des transformées en z combinées.

Propriétés de la transformée en z

1. La transformée en z est primordiale pour l'étude des signaux à temps discret et des systèmes aussi, ceci est grâce aux propriétés importantes qu'elle possède.
2. Dans la suite nous examinerons quelques unes. Reste à rappeler que la région de convergence d'une combinaison de transformées en z est l'intersection de toutes les régions de convergence des transformées en z combinées.

Linéarité

Pour toute constantes α et β, si:

- $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$
- $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$

Alors: $Z\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\}$ = $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $x(n)$

$x(n) = 3\delta(n+1) + 2\delta(n) + 6\delta(n-3) + \delta(n-4)$ et la région de convergence.

Réponse: $X(z) = 3z + 2 + 6z^{-3} + z^{-4}$, le plan $Z - \{0, \infty\}$

Linéarité

Pour toute constantes α et β, si:

- $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$
- $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$

Alors: $Z\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\} = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $x(n)$
$x(n) = 3\delta(n+1) + 2\delta(n) + 6\delta(n-3) + \delta(n-4)$ et la région de convergence.
Réponse: $X(z) = 3z + 2 + 6z^{-3} + z^{-4}$, le plan $Z - \{0, \infty\}$

Inversion en temps

Si $Z\{x(n)\} = X(z)$ dans la région de convergence $r_1 \prec |z| \prec r_2$ alors $Z\{x(-n)\} = X(z^{-1})$ dans la région de convergence $\frac{1}{r_2} \prec |z| \prec \frac{1}{r_1}$.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $x(n)$
$x(n) = U(-n)$ et la région de convergence.
Réponse: $X(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| \prec 1$

Inversion en temps

Si $Z\{x(n)\} = X(z)$ dans la région de convergence $r_1 \prec |z| \prec r_2$ alors $Z\{x(-n)\} = X(z^{-1})$ dans la région de convergence $\frac{1}{r_2} \prec |z| \prec \frac{1}{r_1}$.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $x(n)$
$x(n) = U(-n)$ et la région de convergence.
Réponse: $X(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| \prec 1$

Différentiation

Si $Z\{x(n)\} = X(z)$ alors
$Z\{nx(n)\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$, les deux transformées ont la même région de convergence.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $x(n)$
$x(n) = na^nU(n)$ et la région de convergence.
Réponse: $X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| \succ a$

Différentiation

Si $Z\{x(n)\} = X(z)$ alors
$Z\{nx(n)\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$, les deux transformées ont la même région de convergence.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $x(n)$
$x(n) = na^n U(n)$ et la région de convergence.
Réponse: $X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| \succ a$

Convolution

- $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$ dans la région de convergence RC_1
- $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$ dans la région de convergence RC_2

Alors: $Z\{x_1(n) \ * x_2(n)\}$=$X_1(z)X_2(z)$ dans la région de convergence $RC_1 \cap RC_2$.

Exemple

Soient:

- $x_1(n) = \{1, -2, 1\}$
- $x_2(n) = \begin{cases} 1 \quad si \qquad 0 \preceq n \preceq 5 \\ 0 \qquad si \qquad Sinon \end{cases}$

Déterminer la transformée en z de $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ et la région de convergence.

Réponse: $X(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}, Z - \{0\}$

Convolution

- $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$ dans la région de convergence RC_1
- $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$ dans la région de convergence RC_2

Alors: $Z\{x_1(n) \ast x_2(n)\}$=$X_1(z)X_2(z)$ dans la région de convergence $RC_1 \cap RC_2$.

Exemple

Soient:

- $x_1(n) = \{1, -2, 1\}$
- $x_2(n) = \begin{cases} 1 \quad si & 0 \preceq n \preceq 5 \\ 0 \quad si & Sinon \end{cases}$

Déterminer la transformée en z de $x(n) = x_1(n) \ast x_2(n)$ et la région de convergence.

Réponse: $X(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}, Z - \{0\}$

Corrélation

Si:

- $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$
- $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$

Alors: $Z\{r_{x_1x_2}(l) = X_1(z)X_2(z^{-1})$ $(= R_{x_1x_2}(z))$.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $r_{xx}(n)$

où $x(n) = a^n U(n)$ et $-1 \prec a \prec 1$ et la région de convergence.

Réponse: $R_{xx}(z) = \frac{1}{1-a(z+z^{-1})+a^2}$, $|a| \prec |z| \prec \frac{1}{|a|}$

Corrélation

Si:

- $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$
- $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$

Alors: $Z\{r_{x_1x_2}(l) = X_1(z)X_2(z^{-1})$ $(= R_{x_1x_2}(z))$.

Exemple

Déterminer la transformée en z de $r_{xx}(n)$
où $x(n) = a^n U(n)$ et $-1 \prec a \prec 1$ et la région de convergence.
Réponse: $R_{xx}(z) = \frac{1}{1-a(z+z^{-1})+a^2}$, $|a| \prec |z| \prec \frac{1}{|a|}$

Pôles et zéros

1. Les zéros de la transformée en z, $X(z)$, sont les valeurs pour lesquelles $X(z) = 0$. $X(z)$ se représente dans le plan complexe en marquant les emplacement des zéros par "0".
2. Les pôles de la transformée en z, $X(z)$, sont les valeurs pour lesquelles $X(z) = \infty$. $X(z)$ se représente dans le plan complexe en marquant les emplacement des pôles par "x".

Exemple

Exemple 1: Déterminer le tracé des pôles et des zéros du signal: $x(n) = a^n U(n)$ où $a \succ 0$.

Exemple 2: Déterminer le tracé des pôles et des zéros du signal:

$$x(n) = \begin{cases} a^n U(n) & si \quad 0 \preceq n \preceq M-1, a \succ 0 \\ 0 & si \quad ailleurs \end{cases}$$

Pôles et zéros

1. Les zéros de la transformée en z, $X(z)$, sont les valeurs pour lesquelles $X(z) = 0$. $X(z)$ se représente dans le plan complexe en marquant les emplacement des zéros par "0".
2. Les pôles de la transformée en z, $X(z)$, sont les valeurs pour lesquelles $X(z) = \infty$. $X(z)$ se représente dans le plan complexe en marquant les emplacement des pôles par "x".

Exemple

Exemple 1: Déterminer le tracé des pôles et des zéros du signal:
$x(n) = a^n U(n)$ où $a \succ 0$.
Exemple 2: Déterminer le tracé des pôles et des zéros du signal:

$$x(n) = \begin{cases} a^n U(n) \quad si \quad 0 \preceq n \preceq M-1, a \succ 0 \\ 0 \quad si \quad ailleurs \end{cases}$$

Transformée en z inverse

Souvent nous possédons la transformée en z, $X(z)$, d'un signal, à partir de laquelle nous déterminons le signal $x(n)$. La procédure de transformer le domaine z en celui temporel s'appelle la transformée en z inverse.
Pour se faire, dans le cas simple, il faut décomposer $X(z)$ en fractions rationnelles puis en tirer les $x(n)$ correspondant à chaque fraction en utilisant les propriétés déjà vues.

Exemple

$x(n)$ sachant que sa transformée en z $X(z)$ est donnée par:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Transformée en z inverse

Souvent nous possédons la transformée en z, $X(z)$, d'un signal, à partir de laquelle nous déterminons le signal $x(n)$. La procédure de transformer le domaine z en celui temporel s'appelle la transformée en z inverse.
Pour se faire, dans le cas simple, il faut décomposer $X(z)$ en fractions rationnelles puis en tirer les $x(n)$ correspondant à chaque fraction en utilisant les propriétés déjà vues.

Exemple

$x(n)$ sachant que sa transformée en z $X(z)$ est donnée par:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$