Chapitre II
Transformée de Laplace et SLIT: Filtres analogiques

Filière:
Génie Réseaux et Télécommunications

Introduction

- Dans ce chapitre, nous nous interesserons à la détermination des sorties des systèmes.
- Spécialement celles dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle.
- Cette détermination consiste à résoudre l'Eq diff par des techniques faisant appel à la transformée de Laplace.

Nous introduisons donc cette transformée pour permettre une étude plus simple de la causalité et de la stabilité des SLIT (filtres analogiques).

Transformée de Laplace

Définition: La transformée de Laplace d'un signal $x(t)$ est définie par:

$$X(p) = TL\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-pt)dt \qquad avec \quad p \in \mathcal{C} \qquad (1)$$

Remarque: Pour $p = 2j\pi f$ alors $X(p) = X(f)$

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors
     $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Région de convergence

- **Propriétés:**
  1. $TL\{x(t)\} = X(p)$ et $TL\{y(t)\} = Y(p)$ alors $TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$
  2. $TL\{x(t - t_0)\} = \exp(-pt_0)X(p)$
  3. $TL\{\exp(\pm at)x(t)\} = X(p \mp a)$
  4. $TL\{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p)$
  5. $TL\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n X(p)$
  6. $TL\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(p)}{dp^n}$

Attention

La TL d'un produit normal n'est plus simplement un produit de convolution comme c'est le cas pour la transfomée de Fourier.

Transformée de Laplace de quelques signaux

1. Echelon unitaire: $TL\{U(t)\} = \frac{1}{p}$
2. Impulsion de Dirac: $TL\{\delta(t)\} = 1$
3. Exponentiel causal: $TL\{\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{p-a}$, de façon générale:

$$TL\{\frac{1}{(r-1)!}t^{(r-1)}\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{(p-a)^r}$$

Transformée de Laplace de quelques signaux

1. Echelon unitaire: $TL\{U(t)\} = \frac{1}{p}$
2. Impulsion de Dirac: $TL\{\delta(t)\} = 1$
3. Exponentiel causal: $TL\{\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{p-a}$, de façon générale:

$$TL\{\frac{1}{(r-1)!}t^{(r-1)}\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{(p-a)^r}$$

Transformée de Laplace de quelques signaux

1. Echelon unitaire: $TL\{U(t)\} = \frac{1}{p}$
2. Impulsion de Dirac: $TL\{\delta(t)\} = 1$
3. Exponentiel causal: $TL\{\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{p-a}$, de façon générale:

$$TL\{\frac{1}{(r-1)!}t^{(r-1)}\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{(p-a)^r}$$

Transformée de Laplace de quelques signaux

1. Echelon unitaire: $TL\{U(t)\} = \frac{1}{p}$
2. Impulsion de Dirac: $TL\{\delta(t)\} = 1$
3. Exponentiel causal: $TL\{\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{p-a}$, de façon générale:

$$TL\{\frac{1}{(r-1)!}t^{(r-1)}\exp(at)U(t)\} = \frac{1}{(p-a)^r}$$

Transformée de Laplace inverse

- **Exercice:** Déterminer le signal causal $x(t)$ de transformée de Laplace $X(p) = \frac{(p+1)}{(p-a)^2}$, avec $a \neq -1$.

Solution

$X(p) = \frac{(1)}{(p-a)} + \frac{(1+a)}{(p-a)^2}$, donc:

$$x(t) = [1 + (1 + a)t] \exp(at) U(t)$$

Transformée de Laplace inverse

- **Exercice:** Déterminer le signal causal $x(t)$ de transformée de Laplace $X(p) = \frac{(p+1)}{(p-a)^2}$, avec $a \neq -1$.

Solution

$X(p) = \frac{(1)}{(p-a)} + \frac{(1+a)}{(p-a)^2}$, donc:

$$x(t) = [1 + (1+a)t] \exp(at) U(t)$$

Transformée de Laplace inverse

Donc pour déterminer le signal causal $x(t)$ de transformée de Laplace $X(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, il suffit de décomposer $X(p)$ en éléments simples:

$$X(p) = \sum_{k=0}^{Q} a_k p^k + \sum_{i=1}^{N} [\sum_{r=1}^{R_i} \frac{a_{i,r}}{(p - p_i)^r}]$$

1. R_i : Ordre des pôles p_i.
2. $\sum_{k=0}^{Q} a_k p^k$ existe si $deg(A(p)) \succeq deg(B(p))$

Puis d'en tirer les TL^{-1} correspondantes.

Transformée de Laplace inverse

Donc pour déterminer le signal causal $x(t)$ de transformée de Laplace $X(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, il suffit de décomposer $X(p)$ en éléments simples:

$$X(p) = \sum_{k=0}^{Q} a_k p^k + \sum_{i=1}^{N} [\sum_{r=1}^{R_i} \frac{a_{i,r}}{(p - p_i)^r}]$$

1. R_i : Ordre des pôles p_i.
2. $\sum_{k=0}^{Q} a_k p^k$ existe si $deg(A(p)) \succeq deg(B(p))$

Puis d'en tirer les TL^{-1} correspondantes.

Filtres analogiques

Le filtrage est le principal traitement des signaux analogiques, il a été introduit au début du cours d'une manière générale à l'aide de la notion système. Donc le SLIT sera restreint dans ce qui suit à un filtre LIT analogique.

- **Définition:** Le filtrage est une opération qui nous permet la séparation de signaux dont les supports spectraux sont disjoints.
- **Exemple:**
  1. Séparation des différents signaux que peut recevoir un récepteur.
  2. Les canaux de transmission jouent le rôle d'un filtre.
  3. Les appareils de mesure jouent le rôle d'un filtre.

Filtres analogiques

Le filtrage est le principal traitement des signaux analogiques, il a été introduit au début du cours d'une manière générale à l'aide de la notion système. Donc le SLIT sera restreint dans ce qui suit à un filtre LIT analogique.

- **Définition:** Le filtrage est une opération qui nous permet la séparation de signaux dont les supports spectraux sont disjoints.
- **Exemple:**
  1. Séparation des différents signaux que peut recevoir un récepteur.
  2. Les canaux de transmission jouent le rôle d'un filtre.
  3. Les appareils de mesure jouent le rôle d'un filtre.

Filtres analogiques

Le filtrage est le principal traitement des signaux analogiques, il a été introduit au début du cours d'une manière générale à l'aide de la notion système. Donc le SLIT sera restreint dans ce qui suit à un filtre LIT analogique.

- **Définition:** Le filtrage est une opération qui nous permet la séparation de signaux dont les supports spectraux sont disjoints.
- **Exemple:**
  1. Séparation des différents signaux que peut recevoir un récepteur.
  2. Les canaux de transmission jouent le rôle d'un filtre.
  3. Les appareils de mesure jouent le rôle d'un filtre.

Filtres analogiques

Le filtrage est le principal traitement des signaux analogiques, il a été introduit au début du cours d'une manière générale à l'aide de la notion système. Donc le SLIT sera restreint dans ce qui suit à un filtre LIT analogique.

- **Définition:** Le filtrage est une opération qui nous permet la séparation de signaux dont les supports spectraux sont disjoints.
- **Exemple:**
  1. Séparation des différents signaux que peut recevoir un récepteur.
  2. Les canaux de transmission jouent le rôle d'un filtre.
  3. Les appareils de mesure jouent le rôle d'un filtre.

Filtres analogiques

Le filtrage est le principal traitement des signaux analogiques, il a été introduit au début du cours d'une manière générale à l'aide de la notion système. Donc le SLIT sera restreint dans ce qui suit à un filtre LIT analogique.

- **Définition:** Le filtrage est une opération qui nous permet la séparation de signaux dont les supports spectraux sont disjoints.
- **Exemple:**
  1. Séparation des différents signaux que peut recevoir un récepteur.
  2. Les canaux de transmission jouent le rôle d'un filtre.
  3. Les appareils de mesure jouent le rôle d'un filtre.

Filtrage des signaux (à E.F et à E.I.P.M.F)

Il est intéressant de connaître la répartition spectrale de l'énergie [resp. de la puissance moyenne] d'un signal d'énergie finie [resp. de puissance moyenne finie] après son passage dans un filtre. Soit $x(t)$ l'entrée de ce filtre, $y(t)$ sa sortie et $h(t)$ sa réponse impulsionnelle.

Signaux à énergie finie

Pour le filtrage d'un signal, à énergie finie, par un filtre dont $h(t)$ est sa réponse impulsionnelle, nous avons:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

$$\phi_y(f) = |H(f)|^2 \phi_x(f) \quad (2)$$

Où $H(f) = TF\{h(t)\}$, et est appelée fonction de transfert du filtre.

Signaux à énergie finie

Pour le filtrage d'un signal, à énergie finie, par un filtre dont $h(t)$ est sa réponse impulsionnelle, nous avons:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

$$\phi_y(f) = |H(f)|^2 \phi_x(f) \tag{2}$$

Où $H(f) = TF\{h(t)\}$, et est appelée fonction de transfert du filtre.

Signaux à puissance moyenne finie

Aussi pour le filtrage d'un signal de puissance moyenne finie par un filtre dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$, On a:

$$\phi_y(f) = |H(f)|^2 \phi_x(f) \tag{3}$$

Signaux à puissance moyenne finie

Aussi pour le filtrage d'un signal de puissance moyenne finie par un filtre dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$, On a:

$$\phi_y(f) = |H(f)|^2 \phi_x(f) \tag{3}$$

Causalité et stabilité des filtres

- **Causalité:** La caractéristique essentielle des systèmes physiques à variable temporelle est que l'effet ne peut précéder la cause qui le produit. Plus précisément, la réponse $y(t)$ d'un tel système à l'instant $t = \tau$ ne dépond que des valeurs de l'excitation $x(t)$ pour $t \preceq \tau$. Cette notion de causalité est nécessaire pour que le système soit réalisable physiquement.

  Résultat: Soit $x(t) = 0$ pour $t \preceq \tau$ l'excitation d'un filtre, la condition de causalité entraîne le fait que la réponse impulsionnelle du filtre est nulle pour $t \preceq \tau$.

Causalité et stabilité des filtres

- **Causalité:** La caractéristique essentielle des systèmes physiques à variable temporelle est que l'effet ne peut précéder la cause qui le produit. Plus précisément, la réponse $y(t)$ d'un tel système à l'instant $t = \tau$ ne dépond que des valeurs de l'excitation $x(t)$ pour $t \preceq \tau$. Cette notion de causalité est nécessaire pour que le système soit réalisable physiquement.

  Résultat: Soit $x(t) = 0$ pour $t \preceq \tau$ l'excitation d'un filtre, la condition de causalité entraîne le fait que la réponse impulsionnelle du filtre est nulle pour $t \preceq \tau$.

Causalité et stabilité des filtres

- **Stabilité** Un filtre est stable si et seulement si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Autrement:
  1. Une condition suffisante de stabilité d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ est que: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \prec \infty$
  2. Une autre condition de stabilité d'un filtre ayant une réponse impulsionnelle $h(t)$, de transformée de Laplace $H(p)$ est que les pôles de $H(p)$ soient à parties réelles strictement négatives et le degrè du numérateur de $H(p)$ soit inférieur ou égal à celui de son dénominateur.

Causalité et stabilité des filtres

- **Stabilité** Un filtre est stable si et seulement si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Autrement:
  1. Une condition suffisante de stabilité d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ est que: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt \prec \infty$
  2. Une autre condition de stabilité d'un filtre ayant une réponse impulsionnelle $h(t)$, de transformée de Laplace $H(p)$ est que les pôles de $H(p)$ soient à parties réelles strictement négatives et le degrè du numérateur de $H(p)$ soit inférieur ou égal à celui de son dénominateur.

Causalité et stabilité des filtres

- **Stabilité** Un filtre est stable si et seulement si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Autrement:
  1. Une condition suffisante de stabilité d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ est que: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt \prec \infty$
  2. Une autre condition de stabilité d'un filtre ayant une réponse impulsionnelle $h(t)$, de transformée de Laplace $H(p)$ est que les pôles de $H(p)$ soient à parties réelles strictement négatives et le degré du numérateur de $H(p)$ soit inférieur ou égal à celui de son dénominateur.

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-bas idéal:**

$$H(f) = a rect_{2B}(f) \exp(-2j\pi f t_0) \tag{4}$$

$$h(t) = 2aBsinc[2B(t - t_0)] \tag{5}$$

- **Filtre passe-bande idéal:**

$$H(f) = a[rect_{2B}(f - f_0) + rect_{2B}(f + f_0)] \exp(-2j\pi f t_0) \tag{6}$$

$$h(t) = 4aBsinc[2B(t - t_0)] \cos[2\pi f_0(t - t_0)] \tag{7}$$

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-bas idéal:**

$$H(f) = a rect_{2B}(f) \exp(-2j\pi f t_0) \tag{4}$$

$$h(t) = 2aB sinc[2B(t - t_0)] \tag{5}$$

- **Filtre passe-bande idéal:**

$$H(f) = a[rect_{2B}(f - f_0) + rect_{2B}(f + f_0)] \exp(-2j\pi f t_0) \tag{6}$$

$$h(t) = 4aB sinc[2B(t - t_0)] \cos[2\pi f_0(t - t_0)] \tag{7}$$

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-bas idéal:**

$$H(f) = a\,rect_{2B}(f)\exp(-2j\pi f t_0) \tag{4}$$

$$h(t) = 2aBsinc[2B(t - t_0)] \tag{5}$$

- **Filtre passe-bande idéal:**

$$H(f) = a[rect_{2B}(f - f_0) + rect_{2B}(f + f_0)]\exp(-2j\pi f t_0) \tag{6}$$

$$h(t) = 4aBsinc[2B(t - t_0)]\cos[2\pi f_0(t - t_0)] \tag{7}$$

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-bas idéal:**

$$H(f) = a rect_{2B}(f) \exp(-2j\pi f t_0) \tag{4}$$

$$h(t) = 2aB sinc[2B(t - t_0)] \tag{5}$$

- **Filtre passe-bande idéal:**

$$H(f) = a[rect_{2B}(f - f_0) + rect_{2B}(f + f_0)] \exp(-2j\pi f t_0) \tag{6}$$

$$h(t) = 4aB sinc[2B(t - t_0)] \cos[2\pi f_0(t - t_0)] \tag{7}$$

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-haut idéal:**

$$H(f) = a[1 - rect_{2B}(f)] \exp(-2j\pi f t_0) \quad (8)$$

$$h(t) = a[\delta(t - t_0) - 2Bsinc[2B(t - t_0)]] \quad (9)$$

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-haut idéal:**

$$H(f) = a[1 - rect_{2B}(f)]\exp(-2j\pi f t_0) \tag{8}$$

$$h(t) = a[\delta(t - t_0) - 2Bsinc[2B(t - t_0)]] \tag{9}$$

Quelques filtres de base

- **Filtre passe-haut idéal:**

$$H(f) = a[1 - rect_{2B}(f)] \exp(-2j\pi f t_0) \quad (8)$$

$$h(t) = a[\delta(t - t_0) - 2Bsinc[2B(t - t_0)]] \quad (9)$$

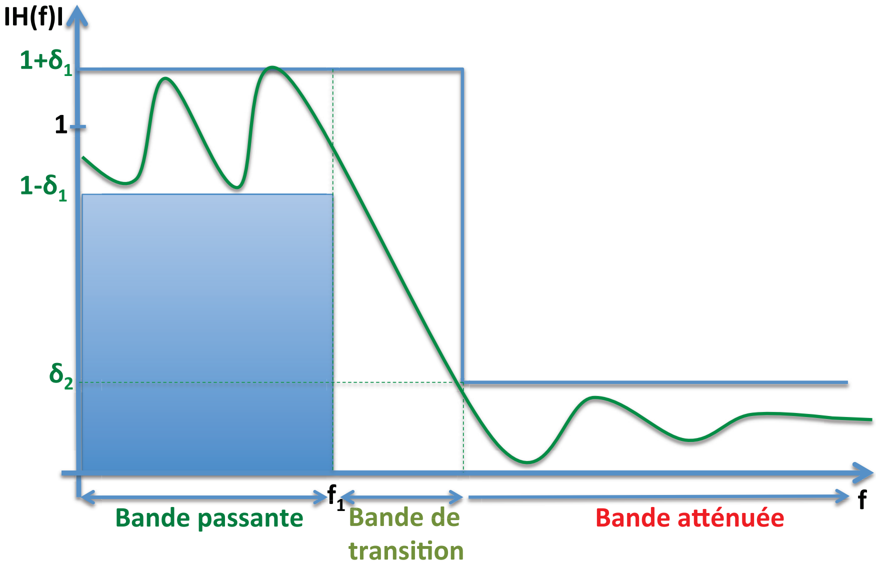
Notion de gabarit

En pratique et à cause de la nature idéalisée des fonctions de transfert précitées, les filtres réalisables ne peuvent satisfaire les spécifications précédentes que d'une façon approchée.

Solution:

Les limites de tolérance que doivent satisfaire $|H(f)|$ et $\arg[H(f)]$ sont définies à l'aide d'un gabarit.

Notion de gabarit



Bande passante: filtre passe-bas

$$\frac{|H(f_c)|}{|H(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

c'est à dire:

$$10 * \log_{10}[\frac{|H(f_c)|^2}{|H(0)|^2}] = -3dB \tag{11}$$

- f_c désigne la fréquence de coupure ou bande passante à $3dB$ du filtre.
- Il existe de nombreuses classes de fonctions $H(f)$ permettant une synthèse approchée des filtres qu'on a étudié.

Exemples:

1. Filtre de Butterworth:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^{2*n}}} \tag{12}$$

Le filtre de Butterworth d'ordre n est défini pour avoir une réponse fréquentielle plate au maximum dans la bande passante avec une atténuation de $-3dB$ pour $f = f_c$.

2. Filtre de Chebycheff:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_{\epsilon}^{2}(f)}} \tag{13}$$

Le filtre de Chebycheff d'ordre n est défini pour avoir une amplitude constante ϵ dans la bande passante. $T_{\epsilon}(f)$ est le polynôme de Chebycheff dordre n.