Chapitre III
Etude des signaux numériques

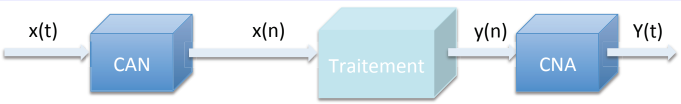
Filière:
Génie Réseaux et Télécommunications

- La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux radars, audios ou vidéos sont analogiques par nature. C'est à dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux mêmes varient de manière continue.
- Ces signaux peuvent-être traités analogiquement à l'aide des filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques.
- Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité...etc, un traitement numérique équivalent est possible et préférable.

- La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux radars, audios ou vidéos sont analogiques par nature. C'est à dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux mêmes varient de manière continue.
- Ces signaux peuvent-être traités analogiquement à l'aide des filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques.
- Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité...etc, un traitement numérique équivalent est possible et préférable.

- La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux radars, audios ou vidéos sont analogiques par nature. C'est à dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux mêmes varient de manière continue.
- Ces signaux peuvent-être traités analogiquement à l'aide des filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques.
- Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité...etc, un traitement numérique équivalent est possible et préférable.

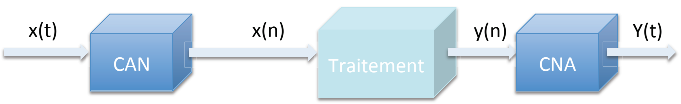
On utilise alors des convertisseurs analogiques-numériques (CAN) et numériques-analogiques(CNA) pour relier au processeur numérique les signaux analogiques d'entrée et de sortie. le schéma correspondant est donné par la figure suivante:



En réalité, le concept de la conversion analogique-numérique (A-N) est considéré comme une opération basée sur les étapes suivantes:

1. Echantillonnage à période fixe T_e.
2. Quantification et codage.

On utilise alors des convertisseurs analogiques-numériques (CAN) et numériques-analogiques(CNA) pour relier au processeur numérique les signaux analogiques d'entrée et de sortie. le schéma correspondant est donné par la figure suivante:



En réalité, le concept de la conversion analogique-numérique (A-N) est considéré comme une opération basée sur les étapes suivantes:

1. Echantillonnage à période fixe T_e.
2. Quantification et codage.

Echantillonnage des signaux analogiques

Définition: Le signal d'entrée $x(t)$, dont l'amplitude varie au cours du temps, est appliqué à un échantillonneur pour être transformé en une suite de valeurs régulièrement espacées. Cette suite peut-être obtenue mathématiquement par la multiplication du signal analogique $x(t)$ par une suite d'impulsions de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e appelée "Peigne de Dirac". Le signal résultant (échantillonné) $x_e(t)$ peut alors être représenté par l'expression:

$$x_e(t) = x(t)\delta_{T_e}(t) \tag{1}$$

Attention!! Pour respecter la forme du signal, il est important d'avoir des impulsions suffisamment proches les unes des autres.

Echantillonnage des signaux analogiques

Définition: Le signal d'entrée $x(t)$, dont l'amplitude varie au cours du temps, est appliqué à un échantillonneur pour être transformé en une suite de valeurs régulièrement espacées. Cette suite peut-être obtenue mathématiquement par la multiplication du signal analogique $x(t)$ par une suite d'impulsions de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e appelée "Peigne de Dirac". Le signal résultant (échantillonné) $x_e(t)$ peut alors être représenté par l'expression:

$$x_e(t) = x(t)\delta_{T_e}(t) \tag{1}$$

Attention!! Pour respecter la forme du signal, il est important d'avoir des impulsions suffisamment proches les unes des autres.

Echantillonnage des signaux analogiques

Définition: Le signal d'entrée $x(t)$, dont l'amplitude varie au cours du temps, est appliqué à un échantillonneur pour être transformé en une suite de valeurs régulièrement espacées. Cette suite peut-être obtenue mathématiquement par la multiplication du signal analogique $x(t)$ par une suite d'impulsions de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e appelée "Peigne de Dirac". Le signal résultant (échantillonné) $x_e(t)$ peut alors être représenté par l'expression:

$$x_e(t) = x(t)\delta_{T_e}(t) \tag{1}$$

Attention!! Pour respecter la forme du signal, il est important d'avoir des impulsions suffisamment proches les unes des autres.

Echantillonnage des signaux analogiques

Analyse fréquentielle

Comme le choix de la période d'échantillonnage T_e dépend de la rapidité du signal, donc de son spectre, il est nécessaire d'analyser le comportement de l'échantillonneur également dans le domaine fréquentiel.

$$X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_e}\delta_{f_e}(f) \tag{2}$$

C'est à dire:

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e) \tag{3}$$

Où $f_e = \frac{1}{T_e}$

Echantillonnage des signaux analogiques

Analyse fréquentielle

Comme le choix de la période d'échantillonnage T_e dépend de la rapidité du signal, donc de son spectre, il est nécessaire d'analyser le comportement de l'échantillonneur également dans le domaine fréquentiel.

$$X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_e}\delta_{f_e}(f) \qquad (2)$$

C'est à dire:

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e) \qquad (3)$$

Où $f_e = \frac{1}{T_e}$

Echantillonnage des signaux analogiques

Analyse fréquentielle

Comme le choix de la période d'échantillonnage T_e dépend de la rapidité du signal, donc de son spectre, il est nécessaire d'analyser le comportement de l'échantillonneur également dans le domaine fréquentiel.

$$X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_e}\delta_{f_e}(f) \quad (2)$$

C'est à dire:

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e) \quad (3)$$

Où $f_e = \frac{1}{T_e}$

Echantillonnage des signaux analogiques

Analyse fréquentielle

Ce résultat très important montre que le spectre d'un signal échantillonné est la somme d'une répétition périodique du spectre du signal analogique $X(f)$, et que la période du spectre est égale à la fréquence d'échantillonnage f_e.

Echantillonnage des signaux analogiques

Recouvrement spectral

- A cause de la répétition du spectre de base autour des multiples de f_e, on imagine facilement que les spectres vont se superposer si la fréquence d'échantillonnage devient trop petite.
- Cette superposition rend difficile voir impossible la reconstitution du signal $x(t)$.
- **Solution:** Il faut que $f_e = \frac{1}{T_e}$ obéisse à une condition pour que cette reconstitution puisse être possible sans perte d'informations.

Echantillonnage des signaux analogiques

Recouvrement spectral

- A cause de la répétition du spectre de base autour des multiples de f_e, on imagine facilement que les spectres vont se superposer si la fréquence d'échantillonnage devient trop petite.
- Cette superposition rend difficile voir impossible la reconstitution du signal $x(t)$.
- **Solution:** Il faut que $f_e = \frac{1}{T_e}$ obéisse à une condition pour que cette reconstitution puisse être possible sans perte d'informations.

Echantillonnage des signaux analogiques

Recouvrement spectral

- A cause de la répétition du spectre de base autour des multiples de f_e, on imagine facilement que les spectres vont se superposer si la fréquence d'échantillonnage devient trop petite.
- Cette superposition rend difficile voir impossible la reconstitution du signal $x(t)$.
- **Solution:** Il faut que $f_e = \frac{1}{T_e}$ obéisse à une condition pour que cette reconstitution puisse être possible sans perte d'informations.

Echantillonnage des signaux analogiques

Théorème de Shanon

Un signal $x(t)$ peut-être représenté d'une manière univoque par ses échantillons $x(kT_e)$ prélevés à la fréquence d'échantillonnage f_e, si f_e est au moins 2 fois plus élevée que la plus grande des fréquences contenues dans le signal.

$$f_e \succeq 2f_{max} \tag{4}$$

Terminologie: La plus petite fréquence $f_{emin} = 2f_{max}$ est appelée fréquence de Nyquist (ou de Shanon)

Echantillonnage des signaux analogiques

Théorème de Shanon

Un signal $x(t)$ peut-être représenté d'une manière univoque par ses échantillons $x(kT_e)$ prélevés à la fréquence d'échantillonnage f_e, si f_e est au moins 2 fois plus élevée que la plus grande des fréquences contenues dans le signal.

$$f_e \succeq 2f_{max} \tag{4}$$

Terminologie: La plus petite fréquence $f_{emin} = 2f_{max}$ est appelée fréquence de Nyquist (ou de Shanon)

Echantillonnage des signaux analogiques

Théorème de Shanon

Un signal $x(t)$ peut-être représenté d'une manière univoque par ses échantillons $x(kT_e)$ prélevés à la fréquence d'échantillonnage f_e, si f_e est au moins 2 fois plus élevée que la plus grande des fréquences contenues dans le signal.

$$f_e \succeq 2f_{max} \qquad (4)$$

Terminologie: La plus petite fréquence $f_{emin} = 2f_{max}$ est appelée fréquence de Nyquist (ou de Shanon)

Quantification et codage d'un signal échantillonné

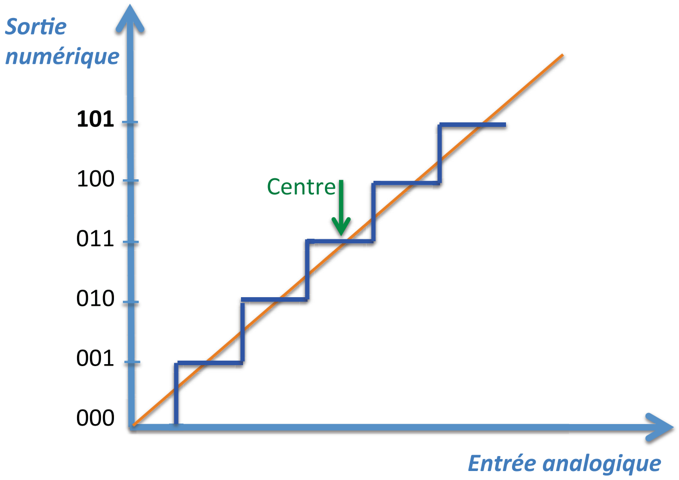
1. Comme la détermination du nombre correspondant à l'amplitude d'un échantillon prend un certain temps, il est important de mémoriser cette valeur analogique entre deux prélévements successifs. Autrement dit, chacun des échantillons prélevés peut prendre en principe une infinité de valeurs du fait de la nature analogique du signal $x(t)$).
2. La quantification est une règle de correspondance entre cette infinité de valeurs (quantum) et un nombre fini de valeurs (codes) assignées au signal de sortie.

Quantification et codage d'un signal échantillonné

1. Comme la détermination du nombre correspondant à l'amplitude d'un échantillon prend un certain temps, il est important de mémoriser cette valeur analogique entre deux prélévements successifs. Autrement dit, chacun des échantillons prélevés peut prendre en principe une infinité de valeurs du fait de la nature analogique du signal $x(t)$).
2. La quantification est une règle de correspondance entre cette infinité de valeurs (quantum) et un nombre fini de valeurs (codes) assignées au signal de sortie.

Quantification et codage d'un signal échantillonné

La loi de quantification la plus fréquemment utilisée est la loi uniforme (le pas de quantification est constant)



Quantification et codage d'un signal échantillonné

1. **Exemple:** Soit un signal x(t) echantilloné puis quantifié et codé sur $N = 4$ niveaux.
2. **Remarque:** Soient $N = 2^n$ niveaux de quantification, alors n est le nombre de bits du convertisseurs A-N.

On a vu que la numérisation d'un signal analogique passe par les étapes: Echantillonnage, quantification et codage.
Le signal ainsi obtenu s'appelle signal numérique.

Quantification et codage d'un signal échantillonné

1. **Exemple:** Soit un signal x(t) echantilloné puis quantifié et codé sur $N = 4$ niveaux.
2. **Remarque:** Soient $N = 2^n$ niveaux de quantification, alors n est le nombre de bits du convertisseurs A-N.

On a vu que la numérisation d'un signal analogique passe par les étapes: Echantillonnage, quantification et codage.

Le signal ainsi obtenu s'appelle signal numérique.

Quantification et codage d'un signal échantillonné

1. **Exemple:** Soit un signal x(t) echantilloné puis quantifié et codé sur $N = 4$ niveaux.
2. **Remarque:** Soient $N = 2^n$ niveaux de quantification, alors n est le nombre de bits du convertisseurs A-N.

On a vu que la numérisation d'un signal analogique passe par les étapes: Echantillonnage, quantification et codage.

Le signal ainsi obtenu s'appelle signal numérique.

Quantification et codage d'un signal échantillonné

1. **Exemple:** Soit un signal x(t) echantilloné puis quantifié et codé sur $N = 4$ niveaux.
2. **Remarque:** Soient $N = 2^n$ niveaux de quantification, alors n est le nombre de bits du convertisseurs A-N.

On a vu que la numérisation d'un signal analogique passe par les étapes: Echantillonnage, quantification et codage.

Le signal ainsi obtenu s'appelle signal numérique.

Signaux numériques

Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des séquences de nombres notées $x[n]$ pour $-\infty \prec n \prec +\infty$ $(x[n])$.

Signaux numériques

Quelques signaux fondamentaux

1. Echelon unitaire $U[n]$:

$$U[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad n \succeq 0 \\ 0 & si \qquad n \prec 0 \end{cases} \tag{5}$$

2. Impulsion unité $\delta[n]$:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad n = 0 \\ 0 & si \qquad n \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

3. La porte de longueur N $rect_N[n]$:

$$rect_N[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad 0 \preceq n \preceq N-1 \\ 0 & \qquad ailleurs \end{cases} \tag{7}$$

Signaux numériques

Quelques signaux fondamentaux

1. Echelon unitaire $U[n]$:

$$U[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad n \succeq 0 \\ 0 & si \qquad n \prec 0 \end{cases} \tag{5}$$

2. Impulsion unité $\delta[n]$:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad n = 0 \\ 0 & si \qquad n \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

3. La porte de longueur N $rect_N[n]$:

$$rect_N[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad 0 \preceq n \preceq N-1 \\ 0 & \qquad ailleurs \end{cases} \tag{7}$$

Signaux numériques

Quelques signaux fondamentaux

1. Echelon unitaire $U[n]$:

$$U[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad n \succeq 0 \\ 0 & si \qquad n \prec 0 \end{cases} \tag{5}$$

2. Impulsion unité $\delta[n]$:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad n = 0 \\ 0 & si \qquad n \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

3. La porte de longueur N $rect_N[n]$:

$$rect_N[n] = \begin{cases} 1 & si \qquad 0 \preceq n \preceq N-1 \\ 0 & \qquad ailleurs \end{cases} \tag{7}$$

Transformée de Fourier Discrète

1. La transformée de Fourier d'un signal à temps continu n'est pas sous une forme appropriée pour être obtenue par un ordinateur, ce dernier étant incapable de traiter des quantités illimitées vu la taille de sa mémoire.
2. L'importance de la transformée de Fourier en traitement de signal rend alors important sa mise sous une forme utilisable, cette forme est appelée Transformée de Fourier Discrète notée TFD.

Transformée de Fourier Discrète

1. La transformée de Fourier d'un signal à temps continu n'est pas sous une forme appropriée pour être obtenue par un ordinateur, ce dernier étant incapable de traiter des quantités illimitées vu la taille de sa mémoire.
2. L'importance de la transformée de Fourier en traitement de signal rend alors important sa mise sous une forme utilisable, cette forme est appelée Transformée de Fourier Discrète notée TFD.

Transformée de Fourier Discrète

1. **Rappel:** La transformée de Fourier d'un signal à temps continu $x(t)$ est donnée par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2j\pi ft)dt \tag{8}$$

2. On définit la TFD comme une application linéaire qui associe à N valeurs $\{x[0], x[1], ..., x[N-1]\}$, N autres valeurs $\{X[0], X[1], ..., X[N-1]\}$ définie par:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-2j\pi k\frac{n}{N}) \;\; pour \;\; n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{9}$$

Transformée de Fourier Discrète

1. **Rappel:** La transformée de Fourier d'un signal à temps continu $x(t)$ est donnée par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-2j\pi ft)dt \tag{8}$$

2. On définit la TFD comme une application linéaire qui associe à N valeurs $\{x[0], x[1], ..., x[N-1]\}$, N autres valeurs $\{X[0], X[1], ..., X[N-1]\}$ définie par:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-2j\pi k\frac{n}{N}) \;\; pour \;\; n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{9}$$

Transformée de Fourier Discrète

1. **Rappel:** La transformée de Fourier d'un signal à temps continu $x(t)$ est donnée par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2j\pi ft) dt \tag{8}$$

2. On définit la TFD comme une application linéaire qui associe à N valeurs $\{x[0], x[1], ..., x[N-1]\}$, N autres valeurs $\{X[0], X[1], ..., X[N-1]\}$ définie par:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-2j\pi k\frac{n}{N}) \ \ pour \ \ n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{9}$$

Transformée de Fourier Discrète

Si encore on pose: $W_N = \exp(\frac{-2j\pi}{N})$, alors:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{kn} \;\; pour \;\; n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{10}$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ \vdots \\ X[n] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots \, W_N^{kn} & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots \, W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[k] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} . \tag{11}$$

Transformée de Fourier Discrète

Si encore on pose: $W_N = \exp(\frac{-2j\pi}{N})$, alors:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{kn} \;\; pour \;\; n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{10}$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ \vdots \\ X[n] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots \, W_N^{kn} & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots \, W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[k] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} . \tag{11}$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés de la TFD

Soient $x[k] \rightarrow^{TFD} X[n]$ et $y[k] \rightarrow^{TFD} Y[n]$

1. 1- $\alpha x[k] + \beta y[k] \rightarrow^{TFD} \alpha X[n] + \beta Y[n]$ $(\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C})$
2. 2- $\forall\ r \in \mathbb{Z}$

$$x[k-r] \rightarrow^{TFD} \exp(-2j\pi r\tfrac{n}{N})X[n]$$
$$\exp(2j\pi r\tfrac{k}{N})x[k] \rightarrow^{TFD} X[n-r]$$

Transformée de Fourier Discrète inverse

La TFDI est définie par:

$$x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp(2j\pi k\frac{n}{N}) \quad pour \quad k \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{12}$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés de la TFD

Soient $x[k] \rightarrow^{TFD} X[n]$ et $y[k] \rightarrow^{TFD} Y[n]$

1. 1- $\alpha x[k] + \beta y[k] \rightarrow^{TFD} \alpha X[n] + \beta Y[n]$ $(\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C})$
2. 2- $\forall\ r \in \mathbb{Z}$

$$x[k-r] \rightarrow^{TFD} \exp(-2j\pi r \tfrac{n}{N}) X[n]$$
$$\exp(2j\pi r \tfrac{k}{N}) x[k] \rightarrow^{TFD} X[n-r]$$

Transformée de Fourier Discrète inverse

La TFDI est définie par:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp(2j\pi k \frac{n}{N}) \quad pour \quad k \in \{0, 1, ..., N-1\} \qquad (12)$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés de la TFD

Soient $x[k] \rightarrow^{TFD} X[n]$ et $y[k] \rightarrow^{TFD} Y[n]$

1. 1- $\alpha x[k] + \beta y[k] \rightarrow^{TFD} \alpha X[n] + \beta Y[n]$ $(\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C})$
2. 2- $\forall\ r \in \mathbb{Z}$

$$x[k-r] \rightarrow^{TFD} \exp(-2j\pi r \tfrac{n}{N}) X[n]$$

$$\exp(2j\pi r \tfrac{k}{N}) x[k] \rightarrow^{TFD} X[n-r]$$

Transformée de Fourier Discrète inverse

La TFDI est définie par:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp(2j\pi k \frac{n}{N}) \ \ pour \ \ k \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{12}$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés de la TFD

Soient $x[k] \rightarrow^{TFD} X[n]$ et $y[k] \rightarrow^{TFD} Y[n]$

1. 1- $\alpha x[k] + \beta y[k] \rightarrow^{TFD} \alpha X[n] + \beta Y[n]$ $(\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C})$
2. 2- $\forall\ r \in \mathbb{Z}$

$$x[k-r] \rightarrow^{TFD} \exp(-2j\pi r\tfrac{n}{N})X[n]$$
$$\exp(2j\pi r\tfrac{k}{N})x[k] \rightarrow^{TFD} X[n-r]$$

Transformée de Fourier Discrète inverse

La TFDI est définie par:

$$x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp(2j\pi k\frac{n}{N}) \ \ pour \ \ k \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{12}$$

Transformée de Fourier Discrète

Propriétés de la TFD

Soient $x[k] \rightarrow^{TFD} X[n]$ et $y[k] \rightarrow^{TFD} Y[n]$

1. 1- $\alpha x[k] + \beta y[k] \rightarrow^{TFD} \alpha X[n] + \beta Y[n]$ $(\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C})$
2. 2- $\forall\ r \in \mathbb{Z}$

$$x[k - r] \rightarrow^{TFD} \exp(-2j\pi r \tfrac{n}{N})X[n]$$
$$\exp(2j\pi r \tfrac{k}{N})x[k] \rightarrow^{TFD} X[n - r]$$

Transformée de Fourier Discrète inverse

La TFDI est définie par:

$$x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp(2j\pi k \frac{n}{N}) \;\; pour \;\; k \in \{0, 1, ..., N - 1\} \qquad (12)$$

Convolution et corrélation cyclique

Convolution

1. Nous introduisons le produit de convolution particulier qui ne concerne que les signaux à temps discret de support temporel: $\{0, 1, ..., N-1\}$ appelé produit de convolution cyclique.
2. On appelle produit de convolution cyclique de deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ de supports temporels: $\{0, 1, ..., N-1\}$, le signal $z[k]$ de support temporel: $\{0, 1, ..., N-1\}$, défini par:

$$z[k] = x[k] * y[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]y[k-r] \tag{13}$$

Convolution et corrélation cyclique

Convolution

1. Nous introduisons le produit de convolution particulier qui ne concerne que les signaux à temps discret de support temporel: $\{0, 1, ..., N-1\}$ appelé produit de convolution cyclique.
2. On appelle produit de convolution cyclique de deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ de supports temporels: $\{0, 1, ..., N-1\}$, le signal $z[k]$ de support temporel: $\{0, 1, ..., N-1\}$, défini par:

$$z[k] = x[k] * y[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]y[k-r] \tag{13}$$

Convolution et corrélation cyclique

Convolution

1. Nous introduisons le produit de convolution particulier qui ne concerne que les signaux à temps discret de support temporel: $\{0, 1, ..., N-1\}$ appelé produit de convolution cyclique.
2. On appelle produit de convolution cyclique de deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ de supports temporels: $\{0, 1, ..., N-1\}$, le signal $z[k]$ de support temporel: $\{0, 1, ..., N-1\}$, défini par:

$$z[k] = x[k] * y[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]y[k-r] \tag{13}$$

Convolution et corrélation cyclique

Convolution

Résultats

1. 1- $z[k] = x[k] * y[k] \rightarrow^{TFD} Z[n] = X[n]Y[n]$
2. $z[k] = x[k]y[k] \rightarrow^{TFD} Z[n] = \frac{1}{N}X[n] * Y[n]$

Convolution et corrélation cyclique

Convolution

Résultats

1. 1- $z[k] = x[k] * y[k] \rightarrow^{TFD} Z[n] = X[n]Y[n]$
2. $z[k] = x[k]y[k] \rightarrow^{TFD} Z[n] = \frac{1}{N} X[n] * Y[n]$

Convolution et corrélation cyclique

Corrélation

De même on définit le produit de corrélation cyclique de deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ de supports temporels: $\{0, 1, ..., N-1\}$ par:

$$z[k] = x^*[-k] * y[k] \tag{14}$$

Théorème de Perseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} |X[r]|^2 \tag{15}$$

Convolution et corrélation cyclique

Corrélation

De même on définit le produit de corrélation cyclique de deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ de supports temporels: $\{0, 1, ..., N-1\}$ par:

$$z[k] = x^*[-k] * y[k] \tag{14}$$

Théorème de Perseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} |X[r]|^2 \tag{15}$$

Convolution et corrélation cyclique

Corrélation

De même on définit le produit de corrélation cyclique de deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ de supports temporels: $\{0, 1, ..., N-1\}$ par:

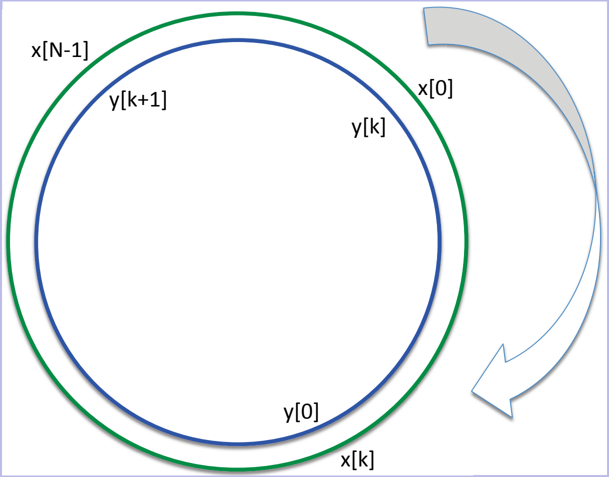
$$z[k] = x^*[-k] * y[k] \tag{14}$$

Théorème de Perseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} |X[r]|^2 \tag{15}$$

Convolution et corrélation cyclique

Corrélation



Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. **Complexité:** Puisqu'on peut représenter la TFD sous la forme d'un produit d'une matrice $N \times N$ et d'un vecteur de dimension N, on peut estimer la complexité de la transformée de Fourier discrète, qui est en fait de l'ordre de N^2.
2. **Exemple:** Pour une suite de longueur 1000, on doit calculer 10^6 $\sin$ et $\cos$ suivis d'une addition et d'une multiplication !!!
3. Pour remédier à ce problème, il a été nécessaire de développer des algorithmes rapides de point de vue convergence, Ces algorithmes portent le nom de FFT. Le nombre d'opérations demandées par ces algorithmes est alors fortement diminué et vaut $N \log_2(N)$. Cette réduction est expliquée par l'exploitation des symétries des fonctions de base: $W_N^{nk}=\exp(-2j\pi\frac{nk}{N})$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. **Complexité:** Puisqu'on peut représenter la TFD sous la forme d'un produit d'une matrice $N \times N$ et d'un vecteur de dimension N, on peut estimer la complexité de la transformée de Fourier discrète, qui est en fait de l'ordre de N^2.
2. **Exemple:** Pour une suite de longueur 1000, on doit calculer 10^6 sin et cos suivis d'une addition et d'une multiplication !!!
3. Pour remédier à ce problème, il a été nécessaire de développer des algorithmes rapides de point de vue convergence, Ces algorithmes portent le nom de FFT. Le nombre d'opérations demandées par ces algorithmes est alors fortement diminué et vaut $N \log_2(N)$. Cette réduction est expliquée par l'exploitation des symétries des fonctions de base: $W_N^{nk}=\exp(-2j\pi\frac{nk}{N})$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. **Complexité:** Puisqu'on peut représenter la TFD sous la forme d'un produit d'une matrice $N \times N$ et d'un vecteur de dimension N, on peut estimer la complexité de la transformée de Fourier discrète, qui est en fait de l'ordre de N^2.
2. **Exemple:** Pour une suite de longueur 1000, on doit calculer 10^6 $\sin$ et $\cos$ suivis d'une addition et d'une multiplication !!!
3. Pour remédier à ce problème, il a été nécessaire de développer des algorithmes rapides de point de vue convergence, Ces algorithmes portent le nom de FFT. Le nombre d'opérations demandées par ces algorithmes est alors fortement diminué et vaut $N\log_2(N)$. Cette réduction est expliquée par l'exploitation des symétries des fonctions de base: $W_N^{nk} = \exp(-2j\pi\frac{nk}{N})$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Système de 4 équations:

$$\begin{cases} X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \\ X[1] = x[0] - jx[1] - x[2] + jx[3] \\ X[2] = x[0] - x[1] + x[2] - x[3] \\ X[3] = x[0] + jx[1] - x[2] - jx[3] \end{cases} \tag{16}$$

Que l'on peut écrire en regroupant:

$$\begin{cases} X[0] = (x[0] + x[2]) + (x[1] + x[3]) \\ X[1] = (x[0] - x[2]) - j(x[1] - x[3]) \\ X[2] = (x[0] + x[2]) - (x[1] + x[3]) \\ X[3] = (x[0] - x[2]) + j(x[1] - x[3]) \end{cases} \tag{17}$$

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Système de 4 équations:

$$\left\{\begin{array}{l} X[0]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3] \\ X[1]=x[0]-jx[1]-x[2]+jx[3] \\ X[2]=x[0]-x[1]+x[2]-x[3] \\ X[3]=x[0]+jx[1]-x[2]-jx[3] \end{array}\right. \tag{16}$$

Que l'on peut écrire en regroupant:

$$\left\{\begin{array}{l} X[0]=(x[0]+x[2])+(x[1]+x[3]) \\ X[1]=(x[0]-x[2])-j(x[1]-x[3]) \\ X[2]=(x[0]+x[2])-(x[1]+x[3]) \\ X[3]=(x[0]-x[2])+j(x[1]-x[3]) \end{array}\right. \tag{17}$$

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. Le terme $x[0] + x[2]$ est calculé 2 fois.
2. Le terme $x[0] - x[2]$ est calculé 2 fois.
3. Le terme $x[1] + x[3]$ est calculé 2 fois.
4. Le terme $x[1] - x[3]$ est calculé 2 fois.

Ces sommes partielles sont recombinées à la fin en multipliant les termes impairs $x[1] \pm x[3]$ par les facteurs $1, j, -1$ et $-j$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. Le terme $x[0] + x[2]$ est calculé 2 fois.
2. Le terme $x[0] - x[2]$ est calculé 2 fois.
3. Le terme $x[1] + x[3]$ est calculé 2 fois.
4. Le terme $x[1] - x[3]$ est calculé 2 fois.

Ces sommes partielles sont recombinées à la fin en multipliant les termes impairs $x[1] \pm x[3]$ par les facteurs $1, j, -1$ et $-j$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. Le terme $x[0] + x[2]$ est calculé 2 fois.
2. Le terme $x[0] - x[2]$ est calculé 2 fois.
3. Le terme $x[1] + x[3]$ est calculé 2 fois.
4. Le terme $x[1] - x[3]$ est calculé 2 fois.

Ces sommes partielles sont recombinées à la fin en multipliant les termes impairs $x[1] \pm x[3]$ par les facteurs $1, j, -1$ et $-j$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

1. Le terme $x[0] + x[2]$ est calculé 2 fois.
2. Le terme $x[0] - x[2]$ est calculé 2 fois.
3. Le terme $x[1] + x[3]$ est calculé 2 fois.
4. Le terme $x[1] - x[3]$ est calculé 2 fois.

Ces sommes partielles sont recombinées à la fin en multipliant les termes impairs $x[1] \pm x[3]$ par les facteurs $1, j, -1$ et $-j$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

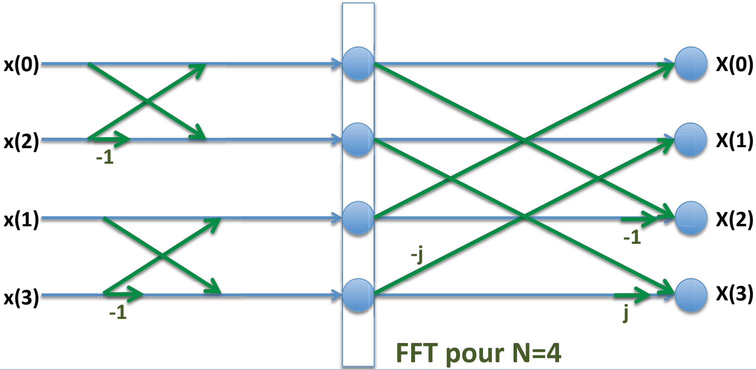
1. Le terme $x[0] + x[2]$ est calculé 2 fois.
2. Le terme $x[0] - x[2]$ est calculé 2 fois.
3. Le terme $x[1] + x[3]$ est calculé 2 fois.
4. Le terme $x[1] - x[3]$ est calculé 2 fois.

Ces sommes partielles sont recombinées à la fin en multipliant les termes impairs $x[1] \pm x[3]$ par les facteurs $1, j, -1$ et $-j$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

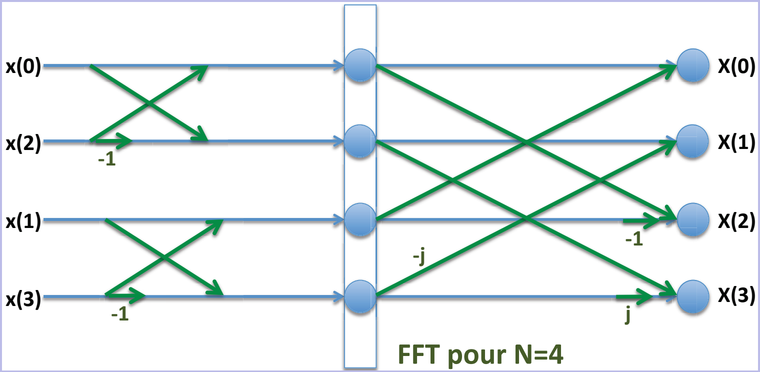
Ordre de complexité

$4\log_2(4) = 8$ opérations $\begin{cases} 4 \oplus \\ 4 \otimes \end{cases}$ Ces opérations sont illustrées graphiquement comme suit:



Ordre de complexité

$4\log_2(4) = 8$ opérations $\begin{cases} 4 \; \oplus \\ 4 \; \otimes \end{cases}$ Ces opérations sont illustrées graphiquement comme suit:



Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Ordre de complexité

Remarques

1. Les échantillons en entrée $x[k]$ sont réordonnés avant de passer à la transformée de Fourier rapide.
2. L'élément de base correspond à la TFD d'ordre $N = 2$.

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Ordre de complexité

Remarques

1. Les échantillons en entrée $x[k]$ sont réordonnés avant de passer à la transformée de Fourier rapide.
2. L'élément de base correspond à la TFD d'ordre $N = 2$.