Chapitre VII
Filtrage adaptatif

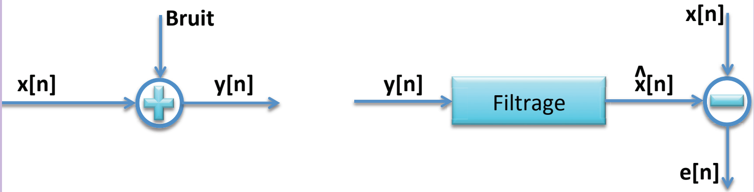
Filière:
Génie Réseaux et Télécommunications

- Les filtres de Wiener développés à partir des concepts temporels et non fréquentiels sont conçus pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre leur sortie et une sortie désirée: Ils sont dits optimum au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne, et nous verrons que dans ce cas les coéfficients du filtre sont liés à la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée et l'intercorrélation entre les signaux d'entrée et de sortie désirés.
- Quand les coéfficients d'auto et d'intercorrélation ne sont pas connus (cas le plus courant), alors on va approcher le filtre optimal de Wiener en utilisant une boucle de retour et un algorithme de minimisation: C'est ce que l'on appelle filtrage adaptatif.

- Les filtres de Wiener développés à partir des concepts temporels et non fréquentiels sont conçus pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre leur sortie et une sortie désirée: Ils sont dits optimum au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne, et nous verrons que dans ce cas les coéfficients du filtre sont liés à la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée et l'intercorrélation entre les signaux d'entrée et de sortie désirés.
- Quand les coéfficients d'auto et d'intercorrélation ne sont pas connus (cas le plus courant), alors on va approcher le filtre optimal de Wiener en utilisant une boucle de retour et un algorithme de minimisation: C'est ce que l'on appelle filtrage adaptatif.

Problème d'estimation linéaire

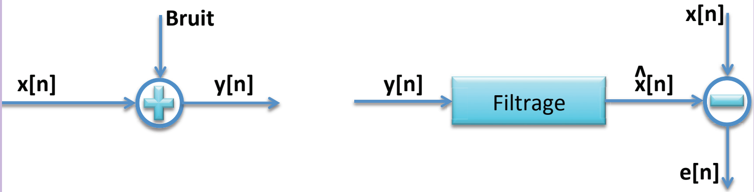
- Cette figure illustre un problème courant d'etimation linéaire. $x[n]$ correspond au signal qui nous interesse mais qui n'est pas directement accessible. seul $y[n]$ l'est, et $y[n]$ est obtenu après passage de $x[n]$ dans un système linéaire suivi de l'addition d'un bruit.



- Le problème qui se pose est comment retrouver $x[n]$ à partir de $y[n]$?

Problème d'estimation linéaire

- Cette figure illustre un problème courant d'etimation linéaire. $x[n]$ correspond au signal qui nous interesse mais qui n'est pas directement accessible. seul $y[n]$ l'est, et $y[n]$ est obtenu après passage de $x[n]$ dans un système linéaire suivi de l'addition d'un bruit.



- Le problème qui se pose est comment retrouver $x[n]$ à partir de $y[n]$?

Solution

Une solution consiste à filtrer $y[n]$ de tel sorte que $\widehat{x}[n]$ soit le plus proche possible de $x[n]$. On peut mesurer la qualité de l'estimation par $e[n]$ définie par:

$$e[n] = x[n] - \widehat{x}[n] \tag{1}$$

Solution

Evidemment, plus $e[n]$ sera faible, plus l'estimation sera bonne. On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2[n]$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable.

Par ailleurs, étant donné que les signaux interessant sont aléatoires, la fonction coût qui sera à minimiser est l'erreur quadratique moyenne *MSE* (Mean Square Error), définie par:

$$\xi[n] = E[e^2[n]] \tag{2}$$

Le filtre de Wiener correspond au filtre qui minimisera la MSE.

Solution

Evidemment, plus $e[n]$ sera faible, plus l'estimation sera bonne. On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2[n]$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable.
Par ailleurs, étant donné que les signaux interessant sont aléatoires, la fonction coût qui sera à minimiser est l'erreur quadratique moyenne *MSE* (Mean Square Error), définie par:

$$\xi[n] = E[e^2[n]] \tag{2}$$

Le filtre de Wiener correspond au filtre qui minimisera la MSE.

Solution

Evidemment, plus $e[n]$ sera faible, plus l'estimation sera bonne. On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2[n]$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable.
Par ailleurs, étant donné que les signaux interessant sont aléatoires, la fonction coût qui sera à minimiser est l'erreur quadratique moyenne *MSE* (Mean Square Error), définie par:

$$\xi[n] = E[e^2[n]] \tag{2}$$

Le filtre de Wiener correspond au filtre qui minimisera la MSE.

Développement

On se limitera içi au calcul des filtres *FIR MA* (Mooving Average= Moyenne Ajustée). Selon les mêmes principes, on peut calculer les filtres *IIR ARMA* (Auto Regressive Mooving Average= Auto Régressif à Moyenne Ajustée).

Appelons H, le filtre que nous recherchons et N la longueur de sa réponse donnée avec une notation matricielle par: $h = [h_0 h_1 \ldots . h_{N-1}]$. Le signal estimé $\widehat{x}[n]$ peut alors s'écrire comme:

$$\widehat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i] \tag{3}$$

Ou encore en introduisant la notation matricielle pour $y[n]$:

$$\widehat{x}[n] = h^T Y[n] \tag{4}$$

Avec: $Y = [y_n y_{n-1} \ldots . y_{n-(N-1)}]$

Développement

On se limitera içi au calcul des filtres *FIR MA* (Mooving Average= Moyenne Ajustée). Selon les mêmes principes, on peut calculer les filtres *IIR ARMA* (Auto Regressive Mooving Average= Auto Régressif à Moyenne Ajustée).

Appelons H, le filtre que nous recherchons et N la longueur de sa réponse donnée avec une notation matricielle par: $h = [h_0 h_1 .... h_{N-1}]$.

Le signal estimé $\widehat{x}[n]$ peut alors s'écrire comme:

$$\widehat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i] \tag{3}$$

Ou encore en introduisant la notation matricielle pour $y[n]$:

$$\widehat{x}[n] = h^T Y[n] \tag{4}$$

Avec: $Y = [y_n y_{n-1} .... y_{n-(N-1)}]$

Développement

On se limitera içi au calcul des filtres *FIR MA* (Mooving Average= Moyenne Ajustée). Selon les mêmes principes, on peut calculer les filtres *IIR ARMA* (Auto Regressive Mooving Average= Auto Régressif à Moyenne Ajustée).

Appelons H, le filtre que nous recherchons et N la longueur de sa réponse donnée avec une notation matricielle par: $h = [h_0 h_1 ....h_{N-1}]$.

Le signal estimé $\widehat{x}[n]$ peut alors s'écrire comme:

$$\widehat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i] \tag{3}$$

Ou encore en introduisant la notation matricielle pour $y[n]$:

$$\widehat{x}[n] = h^T Y[n] \tag{4}$$

Avec: $Y = [y_n y_{n-1} ....y_{n-(N-1)}]$

Développement

On se limitera içi au calcul des filtres *FIR MA* (Mooving Average= Moyenne Ajustée). Selon les mêmes principes, on peut calculer les filtres *IIR ARMA* (Auto Regressive Mooving Average= Auto Régressif à Moyenne Ajustée).

Appelons H, le filtre que nous recherchons et N la longueur de sa réponse donnée avec une notation matricielle par: $h = [h_0 h_1 .... h_{N-1}]$. Le signal estimé $\widehat{x}[n]$ peut alors s'écrire comme:

$$\widehat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i] \tag{3}$$

Ou encore en introduisant la notation matricielle pour $y[n]$:

$$\widehat{x}[n] = h^T Y[n] \tag{4}$$

Avec: $Y = [y_n y_{n-1} .... y_{n-(N-1)}]$

Développement

En faisant l'hypothèse que les signaux $x[n]$ et $Y[n]$ sont stationnaires second ordre, si on introduit 4 dans 2, on obtient:

$$\xi[n] = E[(x[n] - h^T Y[n])^2] \tag{5}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n] - 2h^T Y[n]x[n] + h^T Y[n]Y^T[n]h] \tag{6}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n]] - 2h^T \varphi_{yx} + h^T \varphi_{yy} h \tag{7}$$

Où φ_{yy} est une matrice d'autocorrélation de taile *NxN* définie par: $\varphi_{yy} = E[Y[n]Y^T[n]]$ et où $\varphi_{yx} = E[Y[n]x[n]]$.
Donc la fonction coût *MSE* dépend de la réponse impulsionnelle h.
Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables que sont les N points de la réponse impulsionnelle du filtre.

Développement

En faisant l'hypothèse que les signaux $x[n]$ et $Y[n]$ sont stationnaires second ordre, si on introduit 4 dans 2, on obtient:

$$\xi[n] = E[(x[n] - h^T Y[n])^2] \tag{5}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n] - 2h^T Y[n]x[n] + h^T Y[n]Y^T[n]h] \tag{6}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n]] - 2h^T \varphi_{yx} + h^T \varphi_{yy} h \tag{7}$$

Où φ_{yy} est une matrice d'autocorrélation de taile NxN définie par: $\varphi_{yy} = E[Y[n]Y^T[n]]$ et où $\varphi_{yx} = E[Y[n]x[n]]$.
Donc la fonction coût *MSE* dépend de la réponse impulsionnelle h.
Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables que sont les N points de la réponse impulsionnelle du filtre.

Développement

En faisant l'hypothèse que les signaux $x[n]$ et $Y[n]$ sont stationnaires second ordre, si on introduit 4 dans 2, on obtient:

$$\xi[n] = E[(x[n] - h^T Y[n])^2] \tag{5}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n] - 2h^T Y[n]x[n] + h^T Y[n] Y^T [n]h] \tag{6}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n]] - 2h^T \varphi_{yx} + h^T \varphi_{yy} h \tag{7}$$

Où φ_{yy} est une matrice d'autocorrélation de taile NxN définie par: $\varphi_{yy} = E[Y[n]Y^T[n]]$ et où $\varphi_{yx} = E[Y[n]x[n]]$.

Donc la fonction coût *MSE* dépend de la réponse impulsionnelle h.

Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables que sont les N points de la réponse impulsionnelle du filtre.

Développement

En faisant l'hypothèse que les signaux $x[n]$ et $Y[n]$ sont stationnaires second ordre, si on introduit 4 dans 2, on obtient:

$$\xi[n] = E[(x[n] - h^T Y[n])^2] \tag{5}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n] - 2h^T Y[n]x[n] + h^T Y[n]Y^T[n]h] \tag{6}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n]] - 2h^T \varphi_{yx} + h^T \varphi_{yy} h \tag{7}$$

Où φ_{yy} est une matrice d'autocorrélation de taile NxN définie par: $\varphi_{yy} = E[Y[n]Y^T[n]]$ et où $\varphi_{yx} = E[Y[n]x[n]]$.
Donc la fonction coût *MSE* dépend de la réponse impulsionnelle h.
Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables que sont les N points de la réponse impulsionnelle du filtre.

Développement

En faisant l'hypothèse que les signaux $x[n]$ et $Y[n]$ sont stationnaires second ordre, si on introduit 4 dans 2, on obtient:

$$\xi[n] = E[(x[n] - h^T Y[n])^2] \tag{5}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n] - 2h^T Y[n]x[n] + h^T Y[n]Y^T[n]h] \tag{6}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n]] - 2h^T \varphi_{yx} + h^T \varphi_{yy} h \tag{7}$$

Où φ_{yy} est une matrice d'autocorrélation de taille *NxN* définie par: $\varphi_{yy} = E[Y[n]Y^T[n]]$ et où $\varphi_{yx} = E[Y[n]x[n]]$.

Donc la fonction coût *MSE* dépend de la réponse impulsionnelle *h*. Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables que sont les *N* points de la réponse impulsionnelle du filtre.

Développement

En faisant l'hypothèse que les signaux $x[n]$ et $Y[n]$ sont stationnaires second ordre, si on introduit 4 dans 2, on obtient:

$$\xi[n] = E[(x[n] - h^T Y[n])^2] \tag{5}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n] - 2h^T Y[n]x[n] + h^T Y[n]Y^T[n]h] \tag{6}$$

$$\xi[n] = E[x^2[n]] - 2h^T \varphi_{yx} + h^T \varphi_{yy} h \tag{7}$$

Où φ_{yy} est une matrice d'autocorrélation de taille *NxN* définie par: $\varphi_{yy} = E[Y[n]Y^T[n]]$ et où $\varphi_{yx} = E[Y[n]x[n]]$.
Donc la fonction coût *MSE* dépend de la réponse impulsionnelle h.
Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables que sont les N points de la réponse impulsionnelle du filtre.

Développement

La dérivée de la fonction coût par rapport au $j$ème point de la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = E[\frac{\partial e^2[n]}{\partial h_j}] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial e[n]}{\partial h_j}] \tag{9}$$

En utilisant seul le terme en j dans $e[n] = x[n] - \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i]$ on obtient:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial(-h_j y[n-j])}{\partial h_j}] \tag{10}$$

car: $E[e[n]\frac{\partial x}{\partial h_j}] = 0$

Développement

La dérivée de la fonction coût par rapport au $j$ème point de la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = E[\frac{\partial e^2[n]}{\partial h_j}] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial e[n]}{\partial h_j}] \tag{9}$$

En utilisant seul le terme en j dans $e[n] = x[n] - \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i]$ on obtient:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial(-h_j y[n-j])}{\partial h_j}] \tag{10}$$

car: $E[e[n]\frac{\partial x}{\partial h_j}] = 0$

Développement

La dérivée de la fonction coût par rapport au $j$ème point de la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = E[\frac{\partial e^2[n]}{\partial h_j}] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial e[n]}{\partial h_j}] \tag{9}$$

En utilisant seul le terme en j dans $e[n] = x[n] - \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i]$ on obtient:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial(-h_j y[n-j])}{\partial h_j}] \tag{10}$$

car: $E[e[n]\frac{\partial x}{\partial h_j}] = 0$

Développement

La dérivée de la fonction coût par rapport au $j$ème point de la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = E[\frac{\partial e^2[n]}{\partial h_j}] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial e[n]}{\partial h_j}] \tag{9}$$

En utilisant seul le terme en j dans $e[n] = x[n] - \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i]$ on obtient:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial(-h_j y[n-j])}{\partial h_j}] \tag{10}$$

car: $E[e[n]\frac{\partial x}{\partial h_j}] = 0$

Développement

La dérivée de la fonction coût par rapport au $j$ème point de la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = E[\frac{\partial e^2[n]}{\partial h_j}] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial e[n]}{\partial h_j}] \tag{9}$$

En utilisant seul le terme en j dans $e[n] = x[n] - \sum_{i=0}^{N-1} h_i y[n-i]$ on obtient:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = 2E[e[n]\frac{\partial(-h_j y[n-j])}{\partial h_j}] \tag{10}$$

car: $E[e[n]\frac{\partial x}{\partial h_j}] = 0$

Développement

Donc:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = -2E[e[n]y[n-j]] \tag{11}$$

$$\nabla \xi[n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial h_0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial h_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial h_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial h_{N-1}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Développement

Donc:

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j}[n] = -2E[e[n]y[n-j]] \tag{11}$$

$$\nabla \xi[n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial h_0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial h_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial h_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial h_{N-1}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Développement

Donc:

$$\nabla\xi[n] = -2E\begin{bmatrix} y[n]e[n] \\ y[n-1]e[n] \\ \vdots \\ y[n-j]e[n] \\ \vdots \\ y[n-N+1]e[n] \end{bmatrix} \tag{13}$$

C'est à dire:

$$\nabla\xi[n] = -2E\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ \vdots \\ y[n-j] \\ \vdots \\ y[n-N+1] \end{pmatrix} e[n] \end{bmatrix} \tag{14}$$

Développement

Donc:

$$\nabla\xi[n] = -2E\begin{bmatrix} y[n]e[n] \\ y[n-1]e[n] \\ \vdots \\ y[n-j]e[n] \\ \vdots \\ y[n-N+1]e[n] \end{bmatrix} \quad (13)$$

C'est à dire:

$$\nabla\xi[n] = -2E\left[\begin{pmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ \vdots \\ y[n-j] \\ \vdots \\ y[n-N+1] \end{pmatrix} e[n]\right] \quad (14)$$

Développement

$$\nabla\xi[n] = -2E[Y[n](x[n] - Y^T[n]h)] \tag{15}$$

Autrement:

$$\nabla\xi[n] = -2E[Y[n]x[n]] + 2E[(Y[n]Y^T[n])h] \tag{16}$$

Qui devient en introduisant la matrice d'autocorrélation et le vecteur d'intercorrélation:

$$\nabla\xi[n] = -2\varphi_{yx} + 2\varphi_{yy}h \tag{17}$$

Développement

$$\nabla\xi[n] = -2E[Y[n](x[n] - Y^T[n]h)] \tag{15}$$

Autrement:

$$\nabla\xi[n] = -2E[Y[n]x[n]] + 2E[(Y[n]Y^T[n])h] \tag{16}$$

Qui devient en introduisant la matrice d'autocorrélation et le vecteur d'intercorrélation:

$$\nabla\xi[n] = -2\varphi_{yx} + 2\varphi_{yy}h \tag{17}$$

Développement

$$\nabla\xi[n] = -2E[Y[n](x[n] - Y^T[n]h)] \qquad (15)$$

Autrement:

$$\nabla\xi[n] = -2E[Y[n]x[n]] + 2E[(Y[n]Y^T[n])h] \qquad (16)$$

Qui devient en introduisant la matrice d'autocorrélation et le vecteur d'intercorrélation:

$$\nabla\xi[n] = -2\varphi_{yx} + 2\varphi_{yy}h \qquad (17)$$

Développement

La réponse impulsionnelle optimale h_{opt} est celle qui annule cette équation, d'où:

$$\varphi_{yy} h_{opt} = \varphi_{yx} \tag{18}$$

Le filtre ainsi défini est appelé filtre *FIR* de Wiener. Il permet d'obtenir une erreur quadratique minimale entre $x[n]$ et $\widehat{x}[n]$ donnée par:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - 2h_{opt}^T \varphi_{yx} + h_{opt}^T \varphi_{yy} h_{opt} \tag{19}$$

D'après l'équation 18, on a:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - h_{opt}^T \varphi_{yx} \tag{20}$$

Développement

La réponse impulsionnelle optimale h_{opt} est celle qui annule cette équation, d'où:

$$\varphi_{yy} h_{opt} = \varphi_{yx} \tag{18}$$

Le filtre ainsi défini est appelé filtre *FIR* de Wiener. Il permet d'obtenir une erreur quadratique minimale entre $x[n]$ et $\widehat{x}[n]$ donnée par:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - 2h_{opt}^T \varphi_{yx} + h_{opt}^T \varphi_{yy} h_{opt} \tag{19}$$

D'après l'équation 18, on a:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - h_{opt}^T \varphi_{yx} \tag{20}$$

Développement

La réponse impulsionnelle optimale h_{opt} est celle qui annule cette équation, d'où:

$$\varphi_{yy} h_{opt} = \varphi_{yx} \tag{18}$$

Le filtre ainsi défini est appelé filtre *FIR* de Wiener. Il permet d'obtenir une erreur quadratique minimale entre $x[n]$ et $\widehat{x}[n]$ donnée par:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - 2h_{opt}^T \varphi_{yx} + h_{opt}^T \varphi_{yy} h_{opt} \tag{19}$$

D'après l'équation 18, on a:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - h_{opt}^T \varphi_{yx} \tag{20}$$

Développement

La réponse impulsionnelle optimale h_{opt} est celle qui annule cette équation, d'où:

$$\varphi_{yy} h_{opt} = \varphi_{yx} \tag{18}$$

Le filtre ainsi défini est appelé filtre *FIR* de Wiener. Il permet d'obtenir une erreur quadratique minimale entre $x[n]$ et $\widehat{x}[n]$ donnée par:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - 2h_{opt}^T \varphi_{yx} + h_{opt}^T \varphi_{yy} h_{opt} \tag{19}$$

D'après l'équation 18, on a:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - h_{opt}^T \varphi_{yx} \tag{20}$$

Développement

La réponse impulsionnelle optimale h_{opt} est celle qui annule cette équation, d'où:

$$\varphi_{yy} h_{opt} = \varphi_{yx} \tag{18}$$

Le filtre ainsi défini est appelé filtre *FIR* de Wiener. Il permet d'obtenir une erreur quadratique minimale entre $x[n]$ et $\widehat{x}[n]$ donnée par:

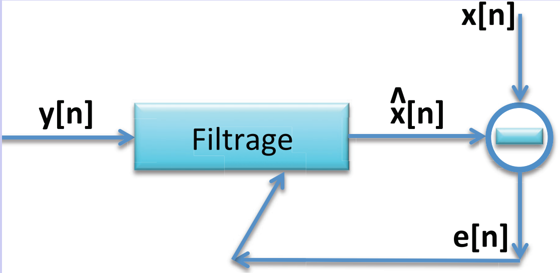
$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - 2h_{opt}^T \varphi_{yx} + h_{opt}^T \varphi_{yy} h_{opt} \tag{19}$$

D'après l'équation 18, on a:

$$\xi_{min}[n] = E[x^2[n]] - h_{opt}^T \varphi_{yx} \tag{20}$$

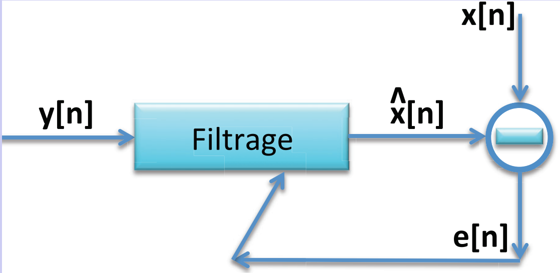
Algorithme pour le filtrage adaptatif

- La mise en oeuvre d'un filtre (estimateur) optimal de Wiener demande la connaissance des caractéristiques du signal, du bruit et de la fonction de transfert du filtre (canal par exemple).
- Le filtrage adaptatif a pour objet d'approcher ces filtres optimaux. Pour cela, les coéfficients de la réponse impulsionnelle du filtre sont adaptés en fonction de l'erreur par une boucle de retour comme le montre la figure.



Algorithme pour le filtrage adaptatif

- La mise en oeuvre d'un filtre (estimateur) optimal de Wiener demande la connaissance des caractéristiques du signal, du bruit et de la fonction de transfert du filtre (canal par exemple).
- Le filtrage adaptatif a pour objet d'approcher ces filtres optimaux. Pour cela, les coéfficients de la réponse impulsionnelle du filtre sont adaptés en fonction de l'erreur par une boucle de retour comme le montre la figure.



Exemple d'algorithmes adaptatifs

RLS: Recursive Least Squares

1. Initialisation:
   $R_{yy}(0) = \frac{1}{\epsilon} I_N, \qquad \epsilon \quad \text{positif} \simeq 0$
   $H(0) = 0$
2. Pour chaque échantillon n=1, 2, ... faire:
   $\widehat{x}(n) = H^T(n-1)Y(n)$
   $e(n) = x(n) - \widehat{x}(n)$

$$R_{yy}^{-1}(n) = \frac{1}{\alpha}\left(R_{yy}^{-1}(n-1) - \frac{R_{yy}^{-1}(n-1)Y(n)Y^T(n)R_{yy}^{-1}(n-1)}{\alpha + Y^T(n)R_{yy}^{-1}(n-1)Y(n)}\right) \tag{21}$$

$H(n) = H(n-1) + R_{yy}^{-1}(n)Y(n)e(n)$

Exemple d'algorithmes adaptatifs

LMS: Least Mean Squares

1. Initialisation H(0)=0
2. Pour chaque échantillon n=1, 2, ... faire:
   $\widehat{x}(n) = H^T(n-1)Y(n)$
   $e(n) = x(n) - \widehat{x}(n)$
   $H(n) = H(n-1) + 2\mu Y(n)e(n)$