Chapitre IV
Signaux aléatoires

Filière:
Génie Réseaux et Télécommunications

Définition

Un signal aléatoire est un signal $x(t)$ qui, comme son nom l'indique, varie aléatoirement en fonction du temps, en particulier sa valeur à un instant t ne peut être prédite; on emploie aussi le terme "processus stochastique".

Exemple

En éléctricité, un exemple classique de precessus aléatoire continu est le bruit de fond généré dans les circuits éléctroniques par l'agitation thermique des éléctrons dans les matériaux conducteurs.

Définition

Un signal aléatoire est un signal $x(t)$ qui, comme son nom l'indique, varie aléatoirement en fonction du temps, en particulier sa valeur à un instant t ne peut être prédite; on emploie aussi le terme "processus stochastique".

Exemple

En éléctricité, un exemple classique de precessus aléatoire continu est le bruit de fond généré dans les circuits éléctroniques par l'agitation thermique des éléctrons dans les matériaux conducteurs.

Le fait qu’on étudie nécessairement des signaux qui ne sont pas parfaitement prévisibles nous amène à étudier les caractéristiques principales des signaux aléatoires et les bases de probabilités nécessaires à cette étude.

Notions de probabilités utilisées

Une variable aléatoire x est caractérisée par sa densité de probabilité $p(x)$ dont les caractéristiques les plus utiles en traitement de signal sont les suivantes:

- La moyenne ou moment du premier ordre:

$$m = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \tag{1}$$

On peut en donner une estimation à partir de N réalisations $x(n)$ de la variable x:

$$m' = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tag{2}$$

Notions de probabilités utilisées

Dans un certain nombre d'applications en traitement de signal il est préférable de traiter des signaux de moyenne nulle, et donc de créer à partir de la variable aléatoire étudiée x une deuxième variable aléatoire $y = x - m$ qui est centrée (dont la moyenne est nulle).

- Moment du deuxième ordre et corrélation: (variables centrées)

L'outil de base pour caractériser les signaux aléatoires est le moment du deuxième ordre d'un couple de variables aléatoires. Le moment du deuxième ordre d'une variable aléatoire centré est sa variance (carré de l'écart type).

$$\sigma^2 = E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \tag{3}$$

Notions de probabilités utilisées

On peut l'estimer à partir de N réalisations:

$$\sigma'^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \tag{4}$$

Cette variance caractérise la dispersion autour de la valeur moyenne (içi autour de zéro)

Notions de probabilités utilisées

Pour caractériser la relation entre deux variables aléatoires , on étudie leur corrélation qui s'écrit en fonction de la densité de probabilité conjointe du couple de variables aléatoires $p(x, y)$:

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y)dxdy \tag{5}$$

On en déduit le coéfficient de corrélation :

$$r = \frac{E(x, y)}{\sqrt{E(x^2)E(y^2)}} \tag{6}$$

r est compris entre -1 et 1.

- Si $r = 0$ alors x et y sont orthogonales.
- Si $r = \pm 1$ alors il y a dépendance linéaire entre x et y.

Notions de probabilités utilisées

De même on peut définir dans le cas discret:

$$E(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n) \tag{7}$$

Les estimations de $E(x)$, $E(x^2)$ et $E(x,y)$ sont d'autant meilleures que N est grand;

N.B Cette corrélation $E(x,y)$ (ou $E(x^2)$) joue un rôle fondamental en traitement de signal.

Les variables aléatoires gaussiennes centrées

Ces variables sont fondamentales pour deux types de raisons, d'une part leur étude théorique met en évidence des propriétés très utiles en pratique, d'une autre part sa densité de probabilité s'écrit:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} \tag{8}$$

Dans le cas d'un couple de variables aléatoires conjointement gaussiennes :

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp \frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2rxy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right) \tag{9}$$

Les moments de ces variables sont :

- $E(x^2) = \sigma_x^2$
- $E(y^2) = \sigma_y^2$
- $E(x, y) = r\sigma_x\sigma_y$

Les variables aléatoires gaussiennes centrées

Si $r = 0$, $p(x, y)$ s'écrit sous la forme d'un produit :

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y) \tag{10}$$

Deux variables aléatoires gaussiennes orthogonales dans leur ensemble sont indépendantes.

Les résultats principaux concernant les signaux aléatoires réels à temps continu:

Définition:

1. Stationnarité: Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.
2. Ergodisme: Un processus aléatoire est dit érgodique si ses valeurs moyennes statistiques et temporelles sont égales.

Les résultats principaux concernant les signaux aléatoires réels à temps continu:

Stationnarité second ordre (SSO):

Un processus aléatoire x est stationnaire second ordre si:

1. $E[x] = Cste$.
2. $\varphi_{xx}(0) = \varphi_x(0) \prec \infty$ ($\sim$ puissance moyenne finie).
3. $\varphi_x(t_1, t_2) = \varphi_x(t_2 - t_1)$ ($\sim$ la fonction d'autocorrélation entre deux instants t_1 et t_2 ne dépend que de la $\neq$ce entre ces deux instants).

Les résultats principaux concernant les signaux aléatoires réels à temps continu:

Densité spectrale:

Un problème important dans de nombreuses applications est l'étude de la répartition en fréquence d'un signal aléatoire. La transformée de Fourier $X(\omega)$ ne peut-être calculer théoriquement mais on peut lui trouver une estimation $\widehat{X}(\omega)$ puis calculer $E[|\widehat{X}(\omega)|^2]$ répartition moyenne de l'énergie (DSP) du signal en fonction de la fréquence.
Comme pour le cas des signaux déterministes:
$DSP(signal) = TF(autocorr : \varphi_{signal})$ on a:

$$E[|\widehat{X}(\omega)|^2] = \phi_x(\omega) \tag{11}$$

$\phi_x(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\varphi(u) = E[x(t)x(t+u)]$ (SSO).

Les résultats principaux concernant les signaux aléatoires réels à temps continu:

Le bruit blanc:

Un processus aléatoire $x(t)$ dont la densité spectrale $(E[|\widehat{X}(\omega)|^2])$ de puissance est constante pour toute valeur de f est appelé bruit blanc, si ce bruit est centré, sa fonction d'autocorrélation vérifie:

- $t = 0$: $r(t) = \sigma^2\delta(t)$
- $t \neq 0$ $r(t) = 0$

Ce bruit blanc a un rôle important dans la modélisation des perturbations apportées aux mesures des signaux.

Filtrage des signaux aléatoires:

Soit un signal aléatoire $x(t)$ qu'on filtre par un filtre linéaire invariant au cours du temps, de réponse en fréquence $H(f)$. On connait la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de $x(t)$, soient $r_x(t)$ et $R_x(f)$. On cherche à trouver la densité $R_y(f)$ et la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ signal sortie du filtre.
Réponse: (Démonstration à faire)

$$R_y(f) = |H(f)|^2 R_x(f)$$

Ce résultat est tout à fait cohérent avec le résultat sur le filtrage des signaux déterministes, pour lequel on a:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$